Algunos teoremas para la profundización en el curriculum del bachillerato ecuatoriano

Some theorems for the in-depth study in the curriculum of the Ecuadorian baccalaureate

PhD. José Enrique Martínez Serra
jose.martinez@unae.edu.ec

Mgs. Germán Wilfrido Panamá Criollo
german.panama@unae.edu.ec

PhD. Arelys García Chávez
arelys.garcia@unae.edu.ec

Resumen

El presente manuscrito contiene las actividades realizadas en el Taller realizado a 62 docentes y estudiantes inscritos en el Taller del mismo nombre de las IV Jornadas Ecuatorianas de GeoGebra, el cual cumplió con los objetivos trazados: demostrar, mediante la ayuda de GeoGebra, algunos teoremas interesantes sobre triángulos, algunos del Bachillerato ecuatoriano, otros no incluidos en su currículo. Además, aplicar los conocimientos adquiridos para analizar, plantear, resolver y comprobar la resolución de problemas de triángulos con la ayuda de GeoGebra. Se realizó una actividad inicial sobre: diagnóstico y expectativas en torno a los elementos notables de los triángulos, posteriormente se resolvieron varios problemas empleando GeoGebra encaminados a construir y resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos donde se empleen rectas, puntos y circunferencias notables de los triángulos.

Palabras Claves: Teoremas, triángulos, puntos notables, rectas notables, circunferencias notables, resolución de problemas

Abstract

This manuscript contains the activities carried out in the Workshop held for 62 teachers and students enrolled in the Workshop of the same name of the IV Ecuadorian GeoGebra Journals, which fulfilled the objectives set: to demonstrate, through the help of GeoGebra, some interesting theorems about triangles, some from the Ecuadorian High School, others not included in their curriculum. In addition, apply the knowledge acquired to analyze, formulate, solve and check the resolution of triangle problems with the help of GeoGebra. An initial activity was carried out on: diagnosis and expectations around the notable elements of the triangles, later several problems were solved using GeoGebra aimed at constructing and solving intra-mathematical and extra-mathematical problems where notable lines, points and circumferences of the triangles are used.

Keywords: Theorems, triangles, notable points, notable lines, notable circumferences, problem solving

Actividades del Taller

Diagnóstico y expectativas:

Conteste las siguientes preguntas, con el afán de valorar conocimientos sobre triángulos.

Defina un triángulo

¿Cuáles son los elementos de un triángulo?

¿Cuántas clases de triángulos conoce?

¿Cuántas y cuáles son las rectas notables de un triángulo?

¿Qué es un baricentro, un ortocentro, un circuncentro y un incentro?

¿Existen tres o más de estos puntos notables sobre una misma recta?

¿Cuáles son las circunferencias inscritas y circunscritas al triángulo?

¿Existen otras circunferencias notables del triángulo?

Dinámicas con papel y un lápiz:

Problema 1: Construir la mediatriz de un segmento (solo usar un trozo de papel y un lápiz).

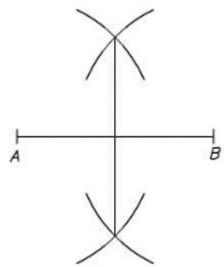


Figura 1. *Construcción de la mediatriz con regla y compás*

Problema 2: Dibujar la bisectriz de un ángulo (solo usar un trozo de papel y un lápiz).

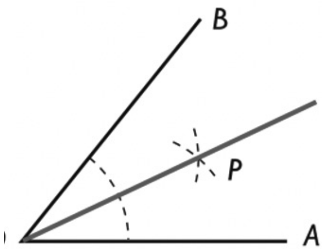


Figura 2. *Construcción de la bisectriz con regla y compás*

R/ Después de varias experimentaciones por los asistentes, se obtienen soluciones ingeniosas y creativas a estas construcciones con papel y lápiz.

Dinámicas con GeoGebra:

Problema 3: Dibujar en GeoGebra la mediatriz de un segmento la y bisectriz de un ángulo.

R/

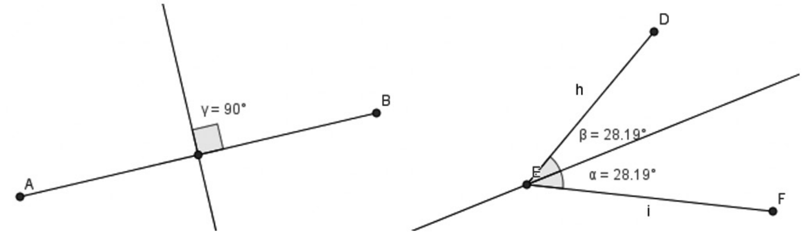


Figura 3. *Construcción de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo con GeoGebra*

Problema 4. Observa el dibujo:

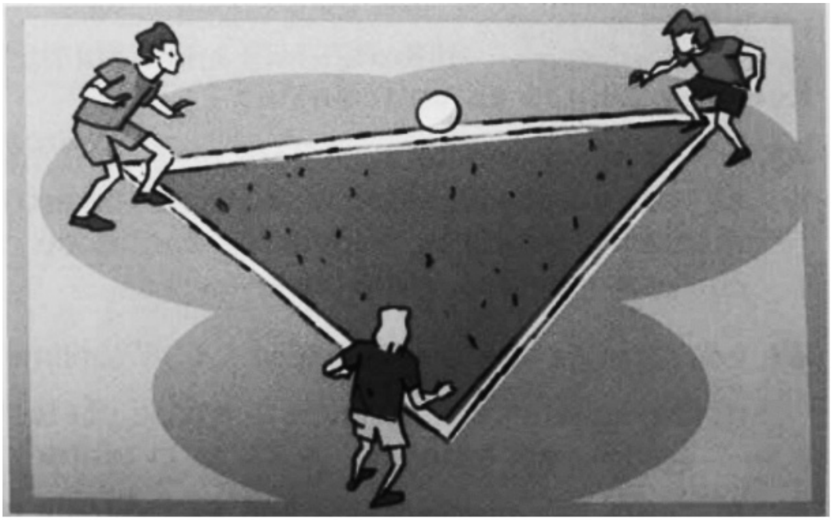
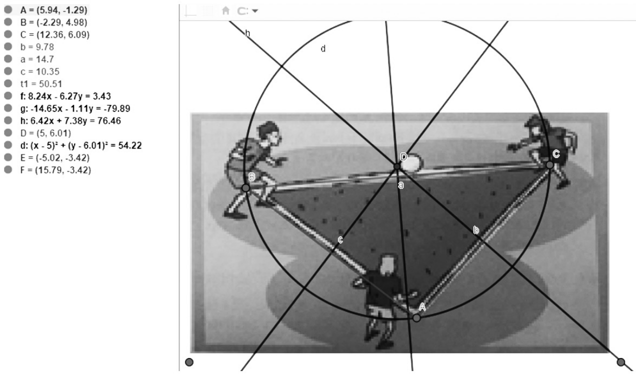


Figura 4. *Niños en los vértices de un triángulo en el terreno*

Halla el punto donde hay que colocar la pelota para que esté a la misma distancia de los tres jugadores.

¿Cómo se llama ese punto?

¿Cómo se representa ese punto utilizando GeoGebra?



R/

Figura 5. *Construcción del circuncentro y la circunferencia circunscrita del triángulo de la imagen, con GeoGebra*

Problema 4. Los abuelos de Juan tienen un prado sin cercar en forma triangular y un caballo. Quieren atar al caballo de modo que desde un punto pueda trasladarse sobre la mayor área circular posible, alcanzando solamente a los lados del prado, pero sin pasar la hierba de la vecina. ¿Dónde tienen que colocar la estaca?

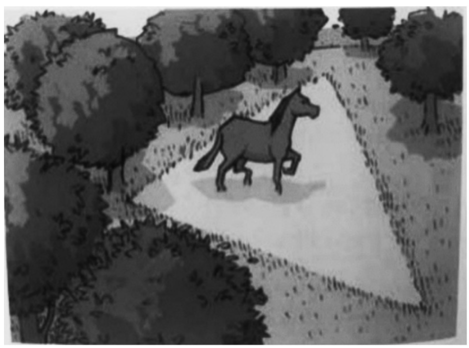


Figura 6. *Caballo dentro del terreno triangular*

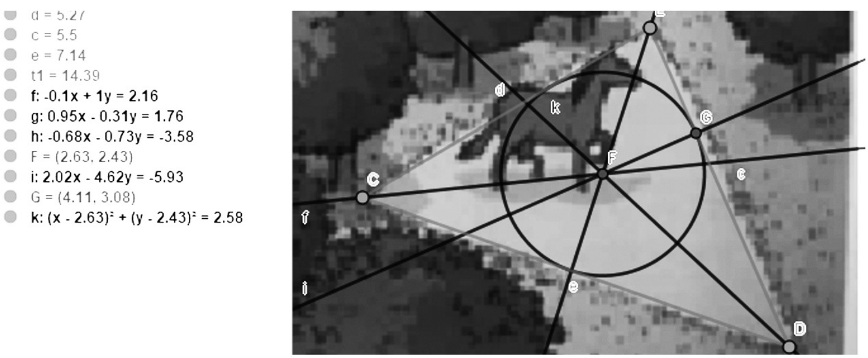


Figura 7. *Construcción del incentro y la circunferencia inscrita del triángulo de la imagen, con GeoGebra*

Problema 5. Realice los siguientes literales encaminados a obtener otra circunferencia especial en los triángulos:

Construir un triángulo ABC acutángulo.

Construir los puntos medios de los tres lados del triángulo M1, M2, M3.

Construir los pies de las alturas del triángulo, H1, H2, H3.

Construir los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo J1, J2, J3.

Coloque como no visibles los segmentos y puntos auxiliares utilizados en el trazado.

R/

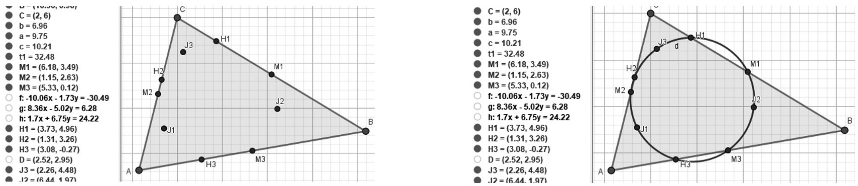


Figura 8. *Visualización de los nueve puntos construidos mediante los pasos precedentes*

¿Qué puede afirmar sobre los 9 puntos anteriormente construidos?

R/ Los 9 puntos pertenecen a una circunferencia.

Trace la circunferencia antes referida.

Manipule a su antojo los vértices del triángulo ABC. ¿qué se observa?

R/ Se observa que, para ciertos triángulos, algunos puntos quedan fuera del triángulo y dicha circunferencia solo pasaría por algunos de los 9 puntos especiales, aunque sí seguirá pasando por los puntos asociados al triángulo, que son externos al triángulo.

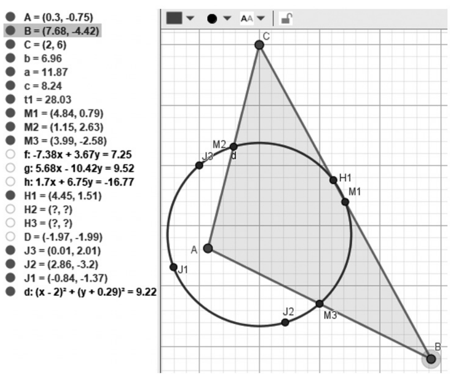


Figura 9. *Caso interesante que aparece en un triángulo obtusángulo*

Delimitar para cuáles triángulos se puede trazar dicha circunferencia en puntos del triángulo, no fuera de él.

R/ En todos, aunque en algunos (los obtusángulos), los puntos notables queden externos al triángulo.

Enunciar la nueva proposición obtenida.

R/ Enunciado de la nueva proposición: *En todo triángulo existe la circunferencia de los nueve puntos, de Euler o de Feuerbach, que pasa por los puntos medios de los tres lados del triángulo, los pies de las alturas del triángulo y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo*.

Problema 6. Realice los siguientes literales, hasta obtener otra recta especial en los triángulos:

Construir un triángulo ABC acutángulo.

Construir la circunferencia de los 9 puntos, siguiendo las actividades anteriores.

Delimitar el ortocentro D.

Delimitar el centro de la circunferencia de los 9 puntos E.

Construir las mediatrices y delimitar el circuncentro S del triángulo.

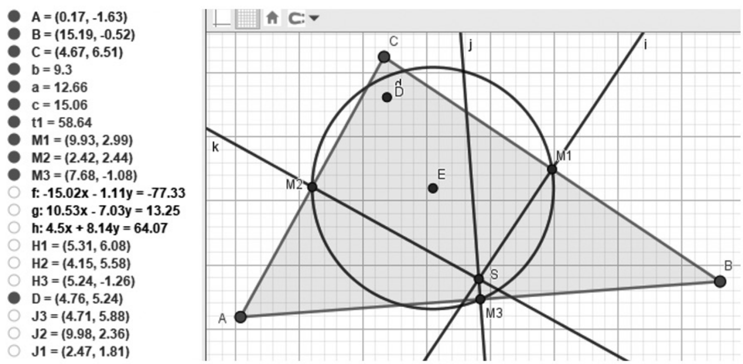
R/ 

Figura 10. *Figura que se retoma de las actividades anteriores y donde construye, además, el circuncentro*

Construir las medianas y delimitar el baricentro T.

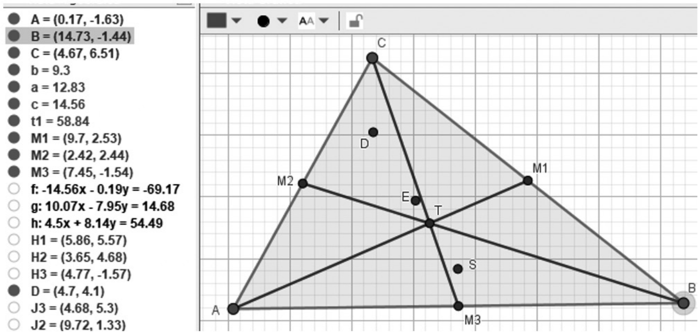


Figura 11. *Figura que retoma las actividades anteriores y donde construye, además, el baricentro*

Ocultar los elementos auxiliares diferentes a los 4 puntos.

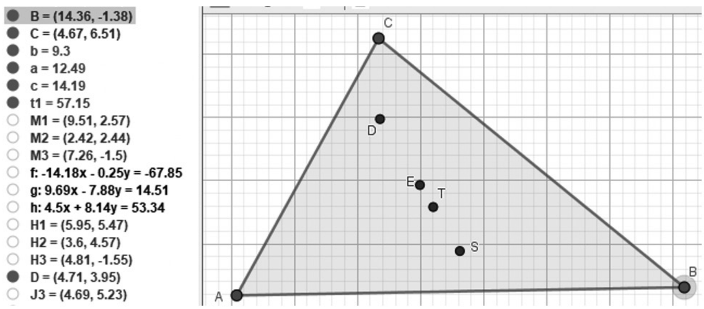


Figura 12. *Figura donde se muestran los 4 puntos notables que se pidieron en los pasos anteriores*

¿Qué puede afirmar sobre los 4 puntos anteriormente construidos? R/ Los 4 puntos pertenecen a una recta.

Trace la recta antes referida.

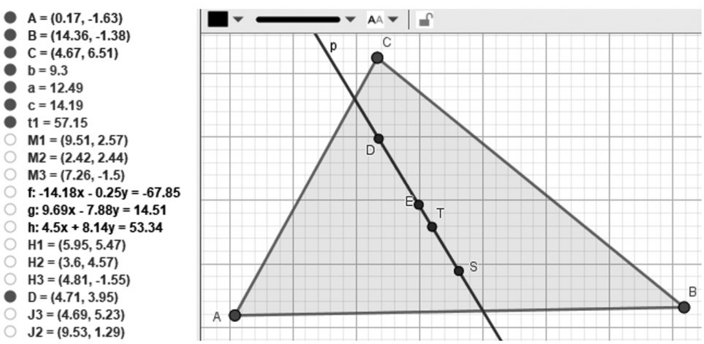


Figura 13. *Figura que muestra la colinealidad de los 4 puntos construidos*

Manipule a su antojo cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿qué se observa?

R/ Se observa que, para ciertos triángulos, algunos puntos descritos quedan fuera del triángulo y dicha recta solo pasaría por algunos de los 4 puntos del triángulo, aunque sí seguirá pasando por los puntos asociados, que son externos al triángulo.

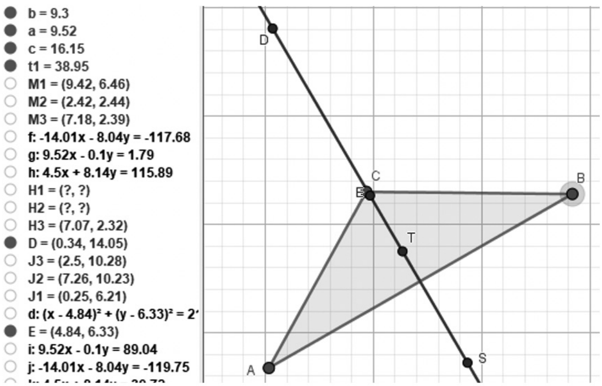


Figura 14. *Figura que muestra un caso interesante de un triángulo obtusángulo, donde algunos puntos notables caen fuera del triángulo*

Delimitar para cuáles triángulos se puede trazar dicha recta.

R/ En todos los triángulos, aunque en algunos los puntos notables queden por fuera del triángulo.

Enunciar la nueva proposición obtenida.

R/ Enunciado de la nueva proposición: En todo triángulo existe la recta de Euler que pasa por el ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo.

Resultados esperados

Se espera que los asistentes al taller sean capaces de "Plantear y resolver problemas con rectas y puntos notables"

Situación didáctica 1. Bisectriz y recta paralela

Construir un triángulo cualquiera ABC.

Construir la bisectriz del ángulo BAC. La paralela a AB que pasa por C corta a esta bisectriz en D.

Verifica midiendo que AC = CD

Desplazar A, B o C. ¿Está igualdad se conserva? Explica por qué.

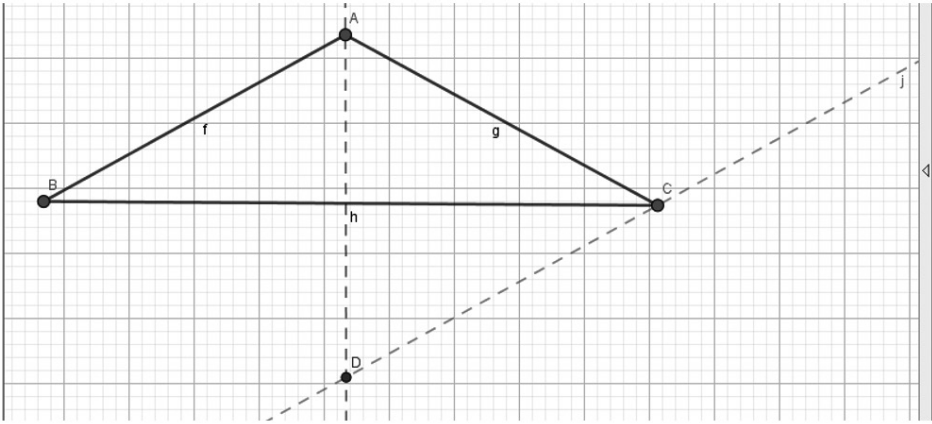


Figura 15. *Bisectriz y paralela a un lado del triángulo*

R/ Se demuestra la igualdad de los ángulos CAD y BAD por ser AD bisectriz del ángulo BAC, posteriormente se demuestra la igualdad de los ángulos BAD y ADC, por ser alternos internos entre las paralelas CD y AB. Luego los ángulos CAD y ACD son iguales por transitividad. Finalmente, el triángulo ACD es isósceles de base AD, por tener dos ángulos iguales, con lo que resulta que AC = CD, por ser lados que se oponen a ángulos iguales en un triángulo isósceles.

Situación didáctica 2: Triángulo a partir de dos mediatrices

Construir dos rectas AB y CD que se corten en O.

Construir un punto E cualquiera que no esté sobre ninguna de estas dos rectas.

Construir un triángulo MNE de forma que las rectas AB y CD sean dos mediatrices de los lados del triángulo. (E es un vértice que ya se conoce)

Explica tu construcción

R/

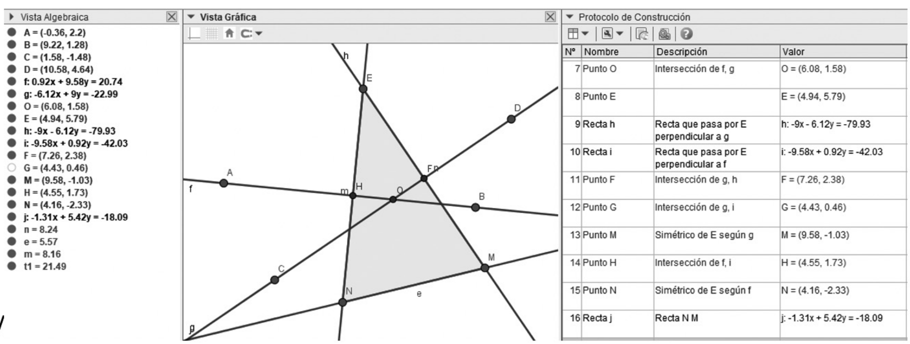


Figura 16. Protocolo de construcción de los elementos necesarios para construir el triángulo MNE

Se puede encontrar otros triángulos diferentes de este que has construido a partir del mismo vértice E y de las mediatrices dadas. Investígalo y explica porque hay varios

R/ Sí, porque pueden variar los vértices, por ende, los lados, y las mediatrices AB y CD pueden ser relativas a otros lados.

Construir un círculo de centro O que pase por E. ¿Qué sucede? ¿Por qué?

R/ Coincide con la circunferencia circunscrita del triángulo

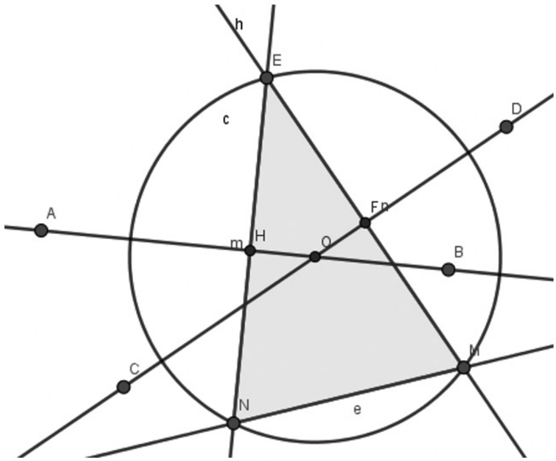


Figura 17. *Circunferencia circunscrita al triángulo construido en los literales anteriores*

Referencias

Carrillo de Albornoz, A. & Llamas, I. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: RA-MA Editorial.

Polya, George. (2014). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Casas, Esperanza. (2011). *Juegos matemáticos. La magia del ingenio.* Bogotá: Magisterio

Cabanne, Nora. (2007). *Didáctica de la matemática.* Buenos Aires: Bonum

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2013). *Cómo razonar matemáticamente.* México: Trillas

Referencias Digitales

Iranzo, Nuria & Fortuny, Josep Maria. (2009). La Influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las ciencias: revistas de investigación y experiencias didácticas.* 27(3), 433-446. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/142075.