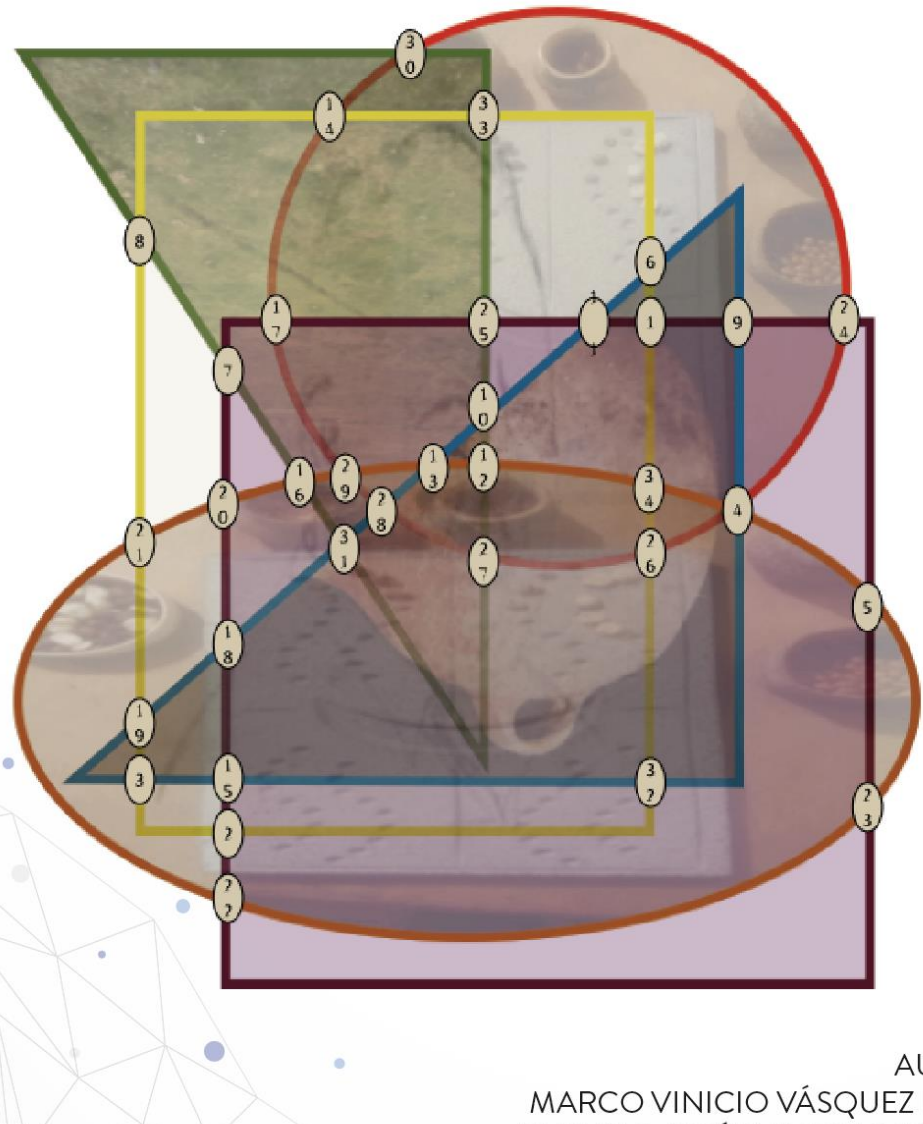
UNAE
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

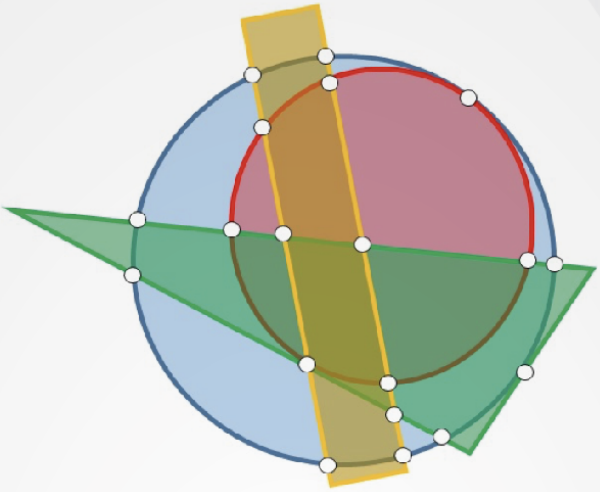
OEI

MEMORETOS

PROPUESTA PEDAGÓGICA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS



AUTORES:
MARCO VINICIO VÁSQUEZ BERNAL
DERLING JOSÉ MENDOZA VELASCO
CARLOS GUILLERMO VÁSQUEZ CHIQUITO



LOS MEMORETOS

Son desafíos matemáticos, que en un formato lúdico permiten interiorizar conceptos matemáticos a través del accionar dinámico y creativo de los estudiantes. En este libro se explica el fundamento metodológico y operativo para lograr que el estudiante construya su conocimiento desde su singularidad, a través de generar interés y apropiamiento.

La presente obra, que se plasma gracias al apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos, para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), servirá como material para desarrollar la propuesta del certamen de matemáticas Pedro Vicente Maldonado, cuyo objetivo es evidenciar como las matemáticas y el aprendizaje de sus contenidos posibilitan igualdad social y criticidad en la formación de los ciudadanos.

Memoretos, propuesta pedagógica para enseñar Matemáticas, es un resultado del grupo de investigación institucional EUREKA 4i, grupo de investigación de la Universidad Nacional de Educación – UNAE.

CREDITOS

♦ UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN – UNAE

Rectora:
Rebeca Castellanos Gómez
Vicerrector Académico:
Luis Enrique Hernández Amaro
Vicerrectora de Investigación y Posgrado:
Graciela de la Caridad Urías Arbeláez

♦ ORGANIZACIÓN DE ESTADOS IBEROAMERICANOS PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA – OEI

Directora y Representante Permanente OEI – Oficina Nacional del Ecuador:
Sara Jaramillo Idrobo
Técnico de Proyectos OEI - Oficina Nacional del Ecuador:
Henry Onel Ulloa Buitrón

♦ CASA DE LA CULTURA ECUATORIANA, NÚCLEO DEL CAÑAR – CCE

Director:
Edgar Palomeque Cantos
Diseño y Edición:
Editorial Alonso María Arce de la CCE, Núcleo del Cañar
MEMORETOS, Propuesta Pedagogica para la Enseñanza de Matemáticas

ISBN: 9789942404312

Autores:

Marco Vinicio Vásquez Bernal
José Derling Mendoza Velasco
Carlos Guillermo Vásquez Chiquito

Diseño y diagramación general:
Carlos Vásquez Chiquito

Diseño de portada:
Marco Vinicio Vásquez Bernal

Impresión:
CONGRAF

Este libro ha sido impreso con el financiamiento de la Organización de Estados Iberoamericanos – OEI.

Esta investigación fue desarrollado en el marco de las actividades del grupo de investigación institucional de la UNAE, EUREKA 4i.

Mayo 2021.

INDICE

PROLOGO

La innovación en educación es esencial para generar cambios en la manera de educar y de aprender en las escuelas, no se pueden seguir manteniendo en vigencia prácticas en el aula que no incentivan ni desarrollan en los estudiantes el razonamiento, la lectura crítica y la creatividad, y esto aplica a todas las asignaturas incluyendo las matemáticas.

Siempre se ha dicho que enseñar es un arte y que un buen maestro es el que evita conducir a sus estudiantes por *túneles obscuros y sin salida* (Alan Haigh, 2010), esto significa que el nuevo conocimiento y su aplicación deben no solamente estar claros para el docente, sino principalmente para el estudiante. Pero esto no siempre se cumple en las aulas de clase, buena parte de los docentes de matemáticas se conforman con las prácticas memorísticas de sus estudiantes y le prestan poca atención al aprendizaje significativo y a la metacognición, por ello como nos encontramos a niños, adolescentes y adultos que saben resolver la raíz cuadrada, pero están en la absoluta oscuridad cuando se les pregunta ¿para qué y cuándo la utilizan?

Mucho se ha dicho, también, sobre lo abstracto de las matemáticas y las dificultades que tienen los docentes para llevarlas a lo concreto y tangible, para volverlas amigables y entretenidas, pero también son muchas las buenas prácticas que se pueden encontrar y recoger de los docentes de matemáticas, que han conjugado lo lúdico, las tecnologías y el material concreto con la enseñanza de las matemáticas, logrando metodologías innovadoras y creativas.

Resulta enriquecedor explorar las prácticas de enseñanza de las y los maestros de prescolar, de cómo enseñan las primeras nociones de número y cantidad en sus aulas, valiéndose sobre todo del recurso lúdico [*jugando con los números*], con tal éxito que los niños adoptan el contar y utilizar los números como algo natural, totalmente espontáneo. A los niños les gusta contar numéricamente en sus dedos y se sienten felices cuando cuentan las cosas. Sin embargo, en el devenir de los años de escolaridad esto cambia abruptamente y las matemáticas dejan de ser lúdicas y se vuelven tan abstractas y difíciles, que terminan siendo las menos queridas y las que más decepción y frustración académica generan.

No cabe duda de que el juego es esencial para los niños y puede convertirse en la puerta de entrada a la participación en la indagación matemática (Vásquez Yépez F. A., 2019), todo va a depender de las habilidades y de los recursos que el docente tenga a mano, y obviamente de una debida planificación de todo el proceso.

Howard Gardner (2007) define a la inteligencia lógico – matemática como “la capacidad para usar los números de manera efectiva y de razonar adecuadamente”, incluye, además, en su definición “la sensibilidad a los esquemas y relaciones lógicas, las afirmaciones y las proposiciones, las funciones y otras abstracciones relacionadas.”, dejando de lado la insistencia en la memorización y la repetición, como único camino para el aprendizaje de las matemáticas, que fue tan explotada por los docentes de la materia.

Por tanto, razonamiento y sensibilidad se deben juntar en la enseñanza de las matemáticas. Francisco Mora (2021) nos dice que: “el cerebro sólo aprende si hay emoción”, entonces el reto de los profesores de matemáticas es emocionar a sus estudiantes, presentándoles en sus clases experiencias nuevas, retos interesantes, ejercicios útiles y significativos que estimulen la aplicación del conocimiento matemático en situaciones de la vida cotidiana.

Es importante que el docente de matemáticas complemente sus clases y recurra a las estrategias del *desarrollo del pensamiento*, estimulando su ejercitación mental y la de sus estudiantes, pudiendo hacer uso de un sinnúmero de recursos completamente accesibles, que vienen en forma de rompecabezas numéricos, problemas lógico-matemáticos, secuencias numéricas, analogías numéricas, etc. Todos estos ejercicios lejos de ser un *mero pasatiempo*, se transforman en mecanismos que estimulan la atención, fortalecen la concentración, desarrollan la intuición y sobre todo generan conexiones neurológicas que terminan favoreciendo a la salud mental.

Con todos estos antecedentes conceptuales sobre la importancia de: la innovación, la lúdica, las inteligencias múltiples, la sensibilidad, la emoción y el desarrollo del pensamiento en la enseñanza de las matemáticas, es que la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) se interesa en apoyar el proyecto *Memoretos - Propuesta Pedagógica para enseñar Matemáticas* impulsado por la UNAE.

La OEI reconoce en *Memoretos* una propuesta pedagógica bien concebida que busca innovar en la enseñanza de las matemáticas y que recoge el esfuerzo de años de investigación, experiencia docente y académica. Un objetivo también congruente con los esfuerzos que realiza la Organización, tratando de explorar e investigar las mejores prácticas educativas en cada país, para ponerlas a disposición de toda la región iberoamericana.

Henrry Ulloa B.
henry.ulloa@oeiecuador.org
Técnico de Proyectos
OEI Oficina Nacional del Ecuador

Introducción

En la visión tradicional de la enseñanza de la Matemática, el papel del docente se simplifica en la explicación del contenido previsto para cada actividad, luego la asignación de deberes o ejercicios, los cuales se han de desarrollar como actividades, las cuales son determinadas como habitualmente frecuentes y de tipo repetitivas, este contexto educativo es percibido como educación tradicional según Jess y McEvilly, (2015). En la actualidad los docentes; raramente utilizan otro recurso instruccional que no sea el libro de texto, el marcador acrílico – pizarrón y el borrador (Deringöl, 2020). Los avances cognitivos de los estudiantes, tanto físicos como intelectuales, son casi nulos; se les mantiene prácticamente atados a sus sillas o mesas de estudio; no se les permite movilizarse alrededor del aula, tampoco, se les concede estar del salón de clases (Burton, 1992).

Munakata, Vaidya, Monahan y Krupa (2019), afirman que el trabajo con la Matemática en el que se les involucra a los estudiantes es predominantemente individual, proscribiéndoseles la revisión y reflexión con sus compañeros de la actividad realizada. Este modo de concebir las actividades en el salón de clases de matemática genera una vinculación de carácter asimétrico y/o asincrónico entre el profesor y los alumnos; el primero es en quien reside la autoridad o el estatus de dominio en el conocimiento; hace la planificación; toma las disposiciones; evalúa los esfuerzos de los alumnos; y asume la responsabilidad del aprendizaje del estudiantado (Pinter, 2014). El modo como tradicionalmente se asumen los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, trae consigo resultados no deseados puesto que obstaculizan no solo el desarrollo cognitivo de los estudiantes, también el desarrollo una matemática emocional, término contrastado por Gómez (2000), quien sugiere un diferido entre la emoción y matemáticas.

El razonamiento lógico-deductivo, conlleva ideológicamente a que se considere que cuando el estudiante aprende matemáticas, en su yo interior se active únicamente las funciones cognitivas, ignorándose todo aquello que rodea su ambiente, como por ejemplo sus emociones, su dominio afectivo, actitudes y creencias, estos factores son primordiales en cuanto a su desenvolvimiento como productores autónomos de conocimiento y en particular restando las posibilidades de empoderamiento matemático.

Con el fin de superar las insuficiencias previamente descritas, en el campo de la enseñanza de la matemática se plantea un modelo didáctico que ha sido construido con proposiciones que plantea una transformación motivadora de las relaciones docente – estudiante, al exponer situaciones geométricas, que acontecen en el aula de clases de Matemática, desde el ámbito común al abstracto, como también de las acciones que los estudiantes de tales situaciones ponen en juego en los escenarios donde estos tienen lugar.

Entre dichas proposiciones se pueden mencionar las siguientes: Aprendizaje lógico racional, Aprendizaje intuitivo, Aprendizaje Basado en la Investigación, Enseñanza por Proyectos, Resolución de Problemas, Estaciones de Trabajo, y Enseñanza Dinámica de la Matemática; es menester señalar que aun cuando entre todas ellas se pueden distinguir diferencias, comparten como invariante el planteamiento de una enseñanza de la Matemática basada sobre acciones inquisitivas llevadas a cabo por los propios estudiantes, de las cuales se afirma que les ayudan a:

(1) Desplegar el entusiasmo y la motivación en la Matemática

(2) Usar su ingenio propio para resolver problemas

(3) Relacionar las ideas y símbolos matemáticos con objetos reales;

De esta forma, se estima que los planteamientos geométricos secuenciales de prácticas, donde el estudiante se hace protagonista de su propio proceso de aprendizaje, son mucho mejores que los métodos tradicionales de enseñanza de la Matemática.

En particular, la dinámica como factor clave en la enseñanza de la matemática, plantea el desarrollo de un acumulado de estrategias de enseñanza y aprendizaje que hacen viable que los estudiantes examinen axiomas o hipótesis emergentes de ideas matemáticas a través de muchos tipos de actividades que se centran en sus acciones empíricas, sensoriales y de pensamiento impulsivo con materiales concretos de diversa naturaleza, enmarcadas en situaciones didácticas que propician relaciones dialécticamente simétricas entre el profesor y los estudiantes, conducentes hacia el reconocimiento de patrones, y el enfrentamiento con situaciones problemáticas ajustadas en el estudiante. Todas estas insertadas por el estudio individualizado o grupal; mediante el descubrimiento o indagación de patrones y solución de problemas como un proceso de reflexión sobre estas acciones que pone al estudiante en tránsito hacia la abstracción propia de la Matemática.

Las situaciones sociales antes aludidas propias de la enseñanza de la matemática, plantean opciones para trascender al aula como lugar único de apropiación del conocimiento y crear otros lugares de aprendizaje; por ello, el enfoque que subyace en la enseñanza didáctica de las matemáticas puede ser puesto en juego en diferentes escenarios, contextos, ambientes y espacios tales como el aula de clases; la biblioteca; un auditorio especial de la institución o un escenario fuera de la universidad.

Lo fundamental de la enseñanza didáctica de las matemáticas no se encuentra en el status quo, si no en la perspectiva de su desenvolvimiento donde los estudiantes aprenden, no por memorización de un procedimiento o contenido matemático específico, sino mediante la exploración de desafíos y conceptos que acontecen a diario, el descubrimiento de principios, la aplicación de imágenes abstractas y fractales en situaciones concretas. De este modo, llevando a cabo actividades manipulativas con objetos modelos, los estudiantes adquieren destrezas, desarrollan habilidades, aprenden conceptos y procesos matemáticos según las fases del modelo de Van Hiele, desde la visualización, el análisis, la deducción informal y la deducción formal según Ma, Lee, Lin y Wu (2015).

Estos son algunos de los principios sobre los que se apoya el presente manuscrito enfocado en una enseñanza dinámica de la Matemática (EDM) la cual suscribe prácticas didácticas de retos en base a la mediación Cognitiva de los procesos de apropiación de la geometría y el análisis abstracto.

CAPITULO 1

PLANO TEÓRICO

De la forma tradicional como ha sido conducido el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (PEMT) en la actualidad, se puede comprobar mediante estudios y resultados estadísticos, que no es efectivo puesto que no asegura que los educandos, sobre todo en los niveles de bachillerato y universitario, se apropien idóneamente de los procesos implicados por la obtención de saberes, conceptos y procedimientos de la Matemática; por ello, la educación matemática actual ha sido objeto de numerosas críticas a nivel mundial, lo cual ha motivado a la exploración de opciones diferentes para enseñar esta ciencia, siempre en la búsqueda de que se haga viable la superación de las insuficiencias, inadecuaciones y anomalías que se han identificado en el enfoque actual del PEMT, en el que no es raro topar estudiantes que sientan miedo o temor aversivo a la Matemática.

Para Giardini, (2016) resulta que el "aprendiente se aburre en la institución educativa, y ese estado emocional lo impele a perder interés por lo que en ella se le trata de enseñar, arribando, finalmente, a la explicación simplista de fracaso escolar" (p. 10). El estudiante es impulsado al desinterés del aprendizaje, al recibir una enseñanza rutinaria con contenidos pre-planificados, formalizando la apatía en las actividades de matemática. La falta de motivación, el bajo estado de ánimo proporciona el bloqueo cognitivo y la frustración que son cambios afectivos indeseables. Al no aprobar y concluir con éxito, las pautas académicas de evaluación, el mismo formaliza una barrera psicológica que concluye con una repercusión total o fobia a las ciencias matemáticas.

Para Gómez (2006): "Las causas del rechazo a esta asignatura se reparten entre la metodología de enseñanza, la falta de motivación, el currículo y la actitud del alumnado, entre otras" (p. 56). La causa más relevante ante la problemática del rechazo a las matemáticas ha sido por la metodología del docente que se encuentra bajo el enfoque y formación academicista o tradicionalista, que se funda en proyectos clásicos del conocimiento. Por su parte, la enseñanza de las matemáticas con estos esquemas no se establece la instrucción metodológica.

Otra causa, se encuentra en la escasa motivación, ya que para Huang y Manouchehri, (2019), una comunidad de aprendizaje necesita una razón para existir, al incentivar el trabajo en conjunto, manifestando el interés compartido en metas y proyectos comunes. Desde el entorno educativo por parte de los docentes, se requiere del elemento potencial de la motivación grupal que oriente el aprendizaje, como también la capacidad de incentivar al estudiante para su integración y construcción de conocimientos, ya que no son parte fundamental de la formación docente.

Desde el punto de vista social para Bonghanoy, Sagpang, Alejan, y Rellon, (2019), en el contexto familiar, frecuentan bajos ánimos a los participantes en los andamios del ciclo educativo, de esta forma se evidencia la poca motivación de los padres y representantes, debido a que la matemática es distinguida, no como una de las ciencias más arduas, si no la más difícil e incomprensible, lo que provoca en los estudiantes un bajo autoestima para su estudio. El desinterés por el estudio de esta área, que presentan los jóvenes, afecta la vida de sus familiares al recibir un bajo rendimiento académico, dando como resultado, la pasividad, inercia, tristeza y enojo.

Desde el punto de vista psicológico la enseñanza de las matemáticas requiere de emociones (Mendoza y Mendoza, 2018). La falta de emociones, además de las actitudes y afecto, por parte del docente proporciona en los estudiantes la ausencia de la confianza en sí mismo. Según Schukajlow, Rakoczy y Pekrun, (2017) el estudiante de matemáticas es un actor que construye las emociones a partir de las normas sociales, del lenguaje y de las definiciones de la situación que él utiliza y que la sociedad le ha dado. La ausencia de la motivación docente refleja efectos indeseables en las actividades educativas de las matemáticas. Al percibir los estudiantes las normativas negativas de la asignatura como una asignatura, repetitiva fuerte e insignificante, el entorno socio educativo, las reproducirá continuamente hasta convertirlo en una realidad. Por otro lado, se desvía la atención del estudiante sobre los conceptos inherentes al proceso. Además, los cálculos frecuentes e insensibles se pueden considerar una barrera para plantear aplicaciones reales que sean significativas al estudiante y motiven su estudio.

En consecuencia, si la insensibilidad de los docentes de matemática se sigue viendo, es decir, si no es tomada en cuenta las emociones, el afecto y la motivación o innovación, se perderá el control en el manejo didáctico, y ya nadie le prestará importancia a esta área (Kim y Hodges, 2012). Por otro lado, según Martínez, (2015) la "investigación en Ciencias Cognitivas ha proporcionado evidencias empíricas que muestran que el conocer no es un reflejo pasivo de una información" (p. 8), por lo tanto, el medio proporciona a la persona; por el contrario, ésta, a través de sus propios mecanismos de funcionamiento intelectual, juega un papel muy activo en "el procesamiento de la información que recibe; dichos procesos son, en gran medida, los responsables del conocimiento que se adquiere" (Martínez, 2015).

Además, también se ha verificado que el desempeño cognitivo de las personas es contextual, histórica y socialmente situado; y en el caso de las Tareas Intelectualmente Exigentes (TIE) como lo es la resolución de problemas en matemática, se ha encontrado que su ejecución es dependiente del contenido disciplinario de dichas tareas y de las experiencias vivenciales previas que su ejecutor haya tenido con ellas. También se ha podido mostrar la relación existente entre desempeño en la tarea y el grado de conciencia que su realizador tiene en relación con las demandas cognitivas, emocionales y procedimentales que la tarea le exige (Rosholm, Mikkelsen y Gumede, 2017). En esta línea de indagación teórica se han comenzado a desarrollar modalidades de enseñanza de la Matemática que propician una actuación consciente de los estudiantes en las prácticas didácticas que pretenden que ellos aprendan esta disciplina. Del mismo modo, cada vez se plantea con más fuerza la necesidad de conciliar el carácter simbólico de las nociones y conceptos matemáticos con la exigencia del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanesian, (1980). Para estos autores, "se debe formalizar la teoría sobre la interiorización, solo así por medio de las verdaderas concepciones, se pueden fundir las definiciones primeramente descubiertas por el individuo en su ambiente" (p. 12).

De esta forma , el aprendizaje brinda las herramientas que debe tener el sujeto para fortificar su formación; esto se basa en que la naturaleza abstracto-simbólica de la Matemática, una de sus más importantes cualidades como herramienta de análisis, puede convertirse en un obstáculo para su aprendizaje cuando el docente subestima la importancia de organizar situaciones didácticas en las que los estudiantes tengan la oportunidad de vivenciar experiencias que hagan que la simbología, así como también los conceptos y procedimientos propios de la Matemática les resulten significativos a ellos. Este planteamiento se sustenta sobre la base de lo que la investigación en Ciencias Cognitivas ha revelado en cuanto a las limitaciones que los aprendices confrontan para construir su conocimiento matemático, destacándose entre ellas los denominados obstáculos epistemológicos, axiológicos, ontológicos, filosóficos, cognitivos y didácticos; asociados respectivamente con la naturaleza del proceso de constitución misma de la matemática como ciencia; la propia dinámica cognitiva del aprendiz; y, las acciones didácticas que pone en juego quien pretende enseñar Matemática (Choy, Thomas y Yoon, 2017).

Un caso específico en el que se presentan obstáculos de los dos primeros tipos mencionados es el que se refiere al desarrollo de competencias para el manejo de los símbolos matemáticos ya que éstos facilitan el pensamiento a algunos estudiantes, pero se lo podrían obstaculizar a aquellos para quienes dichos símbolos carezcan de significado (McCloskey, Lloyd y Lynch, 2019). Además de lo anterior, según McCloskey, Lloyd y Lynch, (2019) también se puede señalar que las corrientes psicológicas cognoscitivistas y constructivistas han alcanzado "el predominio en el campo de la investigación del aprendizaje humano, y han acumulado evidencias suficientes para afirmar que la mayoría de los aprendices de Matemática" (p. 2), sobre todo los de la superior, "necesitan trabajar con modelos y representaciones concretas de los conceptos y principios matemáticos antes de que ellos puedan comprender significativamente las formas matemáticas, abstractas y simbólicas, que corresponden a tales representaciones o modelos" (Hilton y Hilton, 2019, p.13).

Estos planteamientos de Indra y Kusumah, (2017):

> "se apoyan en resultados teóricos según los cuales los estudiantes aprenden mejor las ideas y los conceptos cuando les es permitido que los descubran por si mismos a través de experiencias relacionadas con el mundo físico o entorno socio-ambiental en el que se hallan inmersos; o manipulando modelos representativos de dichas ideas y conceptos" (p.1).

Según Jankvist y Misfeldt, (2019, p. 12) "estos modelos contribuyen a darle sentido a los símbolos y al vocabulario abstracto de la Matemática; además, mediante su uso, los procesos de la Matemática pueden hacerse más significativos". Puede concluirse, entonces, que el "aprendizaje de la Matemática consiste en desarrollar un saber hacer autónomo, vinculado con la activación de procesos de funcionamiento intelectual lo cual se ve favorecido cuando se usan modelos (materiales manipulables) y se aplica la Matemática a situaciones con las que el alumno está familiarizado" (Ma et al., 2015, p. 13); esta concepción sobre el aprendizaje, hace que resulte necesario el señalamiento de la necesidad de que se establezcan nuevos propósitos del hacer matemático en ámbitos escolares (Darlington, 2019). Corno consecuencia de lo anterior, los "fines que le son asignados a la enseñanza de la Matemática ya no son sólo los relativos a la manipulación de símbolos y la ejecución de algoritmos" (Miller y Cadwallader, 2019, p.2). Hoy, como resultado del pre-dominio de los enfoques cognoscitivos en educación, se considera más importante hacer énfasis en "los procesos del pensamiento matemático y no en la mera transmisión de contenidos; a partir de aquí se deriva una concepción de la enseñanza de la Matemática" que se preocupa por desarrollar y fortalecer en los alumnos un modo matemático de pensar, para lo cual resulta imprescindible mostrar una imagen auténtica de lo que es la Matemática (Jankvist y Misfeldt, 2019, p.3).

En efecto, la forma tradicional predominante en su enseñanza ha llevado a muchas personas a creer que la Matemática es un rígido sistema que consta sólo de símbolos y de un conjunto de reglas para operar con ellos. Esta distorsionada imagen de la Matemática es reforzada por la utilización de libros de texto que enfatizan la manipulación de signos, ecuaciones, y otros modos de denotar las definiciones en Matemática (Mendoza y Rivero, 2019). A los estudiantes se les exige que inviertan la mayor parte de su tiempo practicando la ejecución de algoritmos en la realización de ejercicios que son réplicas de otros que previamente le han sido mostrados por el docente o están resueltos en el libro y que han de servir de modelo guía; estos son los denominados "ejercicios modelo" (Weiland, Orrill y Nagar, Brown y Burke, 2020). Con base en la ejecución reiteradamente reforzada de esta actividad, en los estudiantes llega a formularse la creencia errónea según la cual aprender Matemática consiste en el aprestamiento para conocer y luego manipular símbolos de manera precisa y rápida. Para Winsløw, (2007, p.20) existe "la necesidad de mostrar una imagen auténtica de la Matemática obliga a introducir cambios en el contenido y en la forma como se enseña esta asignatura, colocando el énfasis en la comprensión de los procesos matemáticos que están implicados en la ejecución" de las operaciones de cálculo y no sólo en la realización rutinariamente mecánica de estas. Para ello es necesario tener la atención del estudiantado modificando el modo de presentación del contenido matemático, e incluyendo otros aspectos vinculados con la Matemática que habitualmente no son tomados en cuenta (Winsløw, 2007).

Es imprescindible recurrir a técnicas y medios para presentar información diferente a los tradicionales (marcador, tiza, pizarrón); y desarrollar una enseñanza vivencial de la matemática, vinculando el contenido a ser enseñado con aspectos de la vida real: organizando juegos matemáticos, recurriendo a hechos históricos, mostrando aspectos relevantes de la vida de grandes matemáticos; todo ello contribuye a desarrollar actitudes positivas hacia la Matemática, lo cual es imprescindible para el aprendizaje de esta disciplina. Efectivamente, se ha comprobado que existe una correlación positiva entre la actitud del estudiante y su rendimiento académico; por ello, es necesario el desarrollo de actitudes favorables hacia la Matemática según Mendoza y Flores, (2018). Esto podría lograrse haciendo que el alumno se involucre personalmente en su propio aprendizaje, brindándole oportunidades de participar en experiencias que le permitan aprehender significativamente los conceptos matemáticos; es imprescindible hacer que los estudiantes sientan satisfacción al estudiar Matemática, creando una atmósfera que les permita disfrutar del estudio de la Matemática, ayudándolos a desarrollar confianza en su propia habilidad para dominarla, mediante la realización exitosa de actividades vinculadas con situaciones que le son familiares, atractivas e interesantes. Esto no significa, en modo alguno, exponerlos a cuestiones triviales; al contrario, las situaciones de Memoretoy desafío de disposición en las matemáticas propician el abordaje de la ciencia numérica con fines educativos, estas dinámicas han de ser desafiantes y propiciatorias de exigencias intelectuales cónsonas con el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos (Godino, Rivas, Burgos y Wilhelmi, 2019).

Con ello se contribuye a desterrar la idea de que la Matemática es aburrida, árida, inútil, difícil de comprender, inhumana; y combatir los mitos y tabúes que se han creado a su alrededor. Esta tarea de (re)situar a la Matemática como un ámbito de estudio atractivo, agradable, útil, vinculado con las realizaciones humanas, exige cambios de las prácticas que los docentes que enseñan Matemática ponen en juego durante sus acciones didácticas en el aula de clases de Matemática.

Para esto hace falta:

a) orientar el proceso de enseñanza de un modo tal que predomine el descubrimiento, por parte de los estudiantes, de las nociones matemáticas estudiadas.
b) mostrar las aplicaciones que la Matemática tiene en la Ciencia y la Tecnología.
c) evidenciar que la Matemática es un quehacer esencialmente humano, haciendo referencia a la vida de los matemáticos.

Todo lo antes expuesto debe estar enmarcado en una búsqueda de nuevos motivos que hagan atractivo el estudio de la Matemática. Hay que hacerle ver al estudiante que debe estudiar Matemática no sólo por sus rasgos intrínsecos, para ello es menester relacionarla con la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, y mostrar todos estos elementos en sus interrelaciones mutuas. Además, se ha de mostrar que la Matemática es un quehacer humano; de este modo se reivindica al sujeto que hace la Matemática; una forma de lograrlo es reconociendo la posibilidad de equivocarse, admitiendo el carácter didáctico del error, lo cual contrasta con la presunta infalibilidad de la Matemática. Estos son los principios que subyacen en la enseñanza didáctica de la Matemática que, como propuesta didáctica orientada hacia el mejoramiento del PEMT, se desarrolla en el modelo al cual sirve de base este libro.

La enseñanza de la matemática

De la forma tradicional como ha sido conducido el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (PEMT) en la actualidad, se puede comprobar mediante estudios y resultados estadísticos, que no es efectivo puesto que no asegura que los educandos, sobre todo en los niveles de bachillerato y universitario, se apropien idóneamente de los procesos implicados por la obtención de saberes, conceptos y procedimientos de la Matemática; por ello, la educación matemática actual ha sido objeto de numerosas críticas a nivel mundial, lo cual ha motivado a la exploración de opciones diferentes para enseñar esta ciencia, siempre en la búsqueda de que se haga viable la superación de las insuficiencias, inadecuaciones y anomalías que se han identificado en el enfoque actual del PEMT, en el que no es raro topar estudiantes que sientan miedo o temor aversivo a la Matemática.

Para Giardini, (2016) resulta que el “aprendiente se aburre en la institución educativa, y ese estado emocional lo impele a perder interés por lo que en ella se le trata de enseñar, arribando, finalmente, a la explicación simplista de fracaso escolar” (p. 10). El estudiante es impulsado al desinterés del aprendizaje, al recibir una enseñanza rutinaria con contenidos pre-planificados, formalizando la apatía en las actividades de matemática. La falta de motivación, el bajo estado de ánimo proporciona el bloqueo cognitivo y la frustración que son cambios afectivos indeseables. Al no aprobar y concluir con éxito, las pautas académicas de evaluación, el mismo formaliza una barrera psicológica que concluye con una repercusión total o fobia a las ciencias matemáticas.

Para Gómez (2006): "Las causas del rechazo a esta asignatura se reparten entre la metodología de enseñanza, la falta de motivación, el currículo y la actitud del alumnado, entre otras" (p. 56). La causa más relevante ante la problemática del rechazo a las matematicas, ha sido por la metodología del docente que se encuentra bajo el enfoque y formación academicista o tradicionalista, que se funda en proyectos clásicos del conocimiento. Por su parte, la enseñanza de las matemáticas con estos esquemas no se establece la instrucción metodológica.

Otra causa, se encuentra en la escasa motivación, ya que para Huang y Manouchehri, (2019), una comunidad de aprendizaje necesita una razón para existir, al incentivar el trabajo en conjunto, manifestando el interés compartido en metas y proyectos comunes. Desde el entorno educativo por parte de los docentes, se requiere del elemento potencial de la motivación grupal que oriente el aprendizaje, como también la capacidad de incentivar al estudiante para su integración y construcción de conocimientos, ya que no son parte fundamental de la formación docente.

Desde el punto de vista social para Bonghanoy, Sagpang, Alejan, y Rellon, (2019), en el contexto familiar, frecuentan bajos ánimos a los participantes en los andamios del ciclo educativo, de esta forma se evidencia la poca motivación de los padres y representantes, debido a que la matemática es distinguida, no como una de las ciencias más arduas, si no la más difícil e incomprensible, lo que provoca en los estudiantes un bajo autoestima para su estudio. El desinterés por el estudio de esta área, que presentan los jóvenes, afecta la vida de sus familiares al recibir un bajo rendimiento académico, dando como resultado, la pasividad, inercia, tristeza y enojo.

Desde el punto de vista psicológico la enseñanza de las matemáticas requiere de emociones (Mendoza y Mendoza, 2018). La falta de emociones, además de las actitudes y afecto, por parte del docente proporciona en los estudiantes la ausencia de la confianza en sí mismo. Según Schukajlow, Rakoczy y Pekrun, (2017) el estudiante de matemáticas es un actor que construye las emociones a partir de las normas sociales, del lenguaje y de las definiciones de la situación que él utiliza y que la sociedad le ha dado. La ausencia de la motivación docente refleja efectos indeseables en las actividades educativas de las matemáticas. Al percibir los estudiantes las normativas negativas de la asignatura como una asignatura, repetitiva fuerte e insignificante, el entorno socio educativo, las reproducirá continuamente hasta convertirlo en una realidad. Por otro lado, se desvía la atención del estudiante sobre los conceptos inherentes al proceso. Además, los cálculos frecuentes e insensibles se pueden considerar una barrera para plantear aplicaciones reales que sean significativas al estudiante y motiven su estudio.

En consecuencia, si la insensibilidad de los docentes de matemática se sigue viendo, es decir, si no es tomada en cuenta las emociones, el afecto y la motivación o innovación, se perderá el control en el manejo didáctico, y ya nadie le prestará importancia a esta área (Kim y Hodges, 2012).

Por otro lado, según Martínez, (2015) la "investigación en Ciencias Cognitivas ha proporcionado evidencias empíricas que muestran que el conocer no es un reflejo pasivo de una información" (p. 8), por lo tanto, el medio proporciona a la persona; por el contrario, ésta, a través de sus propios mecanismos de funcionamiento intelectual, juega un papel muy activo en "el procesamiento de la información que recibe; dichos procesos son, en gran medida, los responsables del conocimiento que se adquiere" (Martínez, 2015).

Además, también se ha verificado que el desempeño cognitivo de las personas es contextual, histórica y socialmente situado; y en el caso de las Tareas Intelectualmente Exigentes (TIE) como lo es la resolución de problemas en matemática, se ha encontrado que su ejecución es dependiente del contenido disciplinario de dichas tareas y de las experiencias vivenciales previas que su ejecutor haya tenido con ellas. También se ha podido mostrar la relación existente entre desempeño en la tarea y el grado de conciencia que su realizador tiene en relación con las demandas cognitivas, emocionales y procedimentales que la tarea le exige (Rosholm, Mikkelsen y Gumede, 2017). En esta línea de indagación teórica se han comenzado a desarrollar modalidades de enseñanza de la Matemática que propician una actuación consciente de los estudiantes en las prácticas didácticas que pretenden que ellos aprendan esta disciplina. Del mismo modo, cada vez se plantea con más fuerza la necesidad de conciliar el carácter simbólico de las nociones y conceptos matemáticos con la exigencia del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanesian, (1980). Para estos autores, "se debe formalizar la teoría sobre la interiorización, solo así por medio de las verdaderas concepciones, se pueden fundir las definiciones primeramente descubiertas por el individuo en su ambiente" (p. 12).

De esta forma , el aprendizaje brinda las herramientas que debe tener el sujeto para fortificar su formación; esto se basa en que la naturaleza abstracto-simbólica de la Matemática, una de sus más importantes cualidades como herramienta de análisis, puede convertirse en un obstáculo para su aprendizaje cuando el docente subestima la importancia de organizar situaciones didácticas en las que los estudiantes tengan la oportunidad de vivenciar experiencias que hagan que la simbología, así como también los conceptos y procedimientos propios de la Matemática les resulten significativos a ellos. Este planteamiento se sustenta sobre la base de lo que la investigación en Ciencias Cognitivas ha revelado en cuanto a las limitaciones que los aprendices confrontan para construir su conocimiento matemático, destacándose entre ellas los denominados obstáculos epistemológicos, axiológicos, ontológicos, filosóficos, cognitivos y didácticos; asociados respectivamente con la naturaleza del proceso de constitución misma de la matemática como ciencia; la propia dinámica cognitiva del aprendiz; y, las acciones didácticas que pone en juego quien pretende enseñar Matemática (Choy, Thomas y Yoon, 2017).

Un caso específico en el que se presentan obstáculos de los dos primeros tipos mencionados es el que se refiere al desarrollo de competencias para el manejo de los símbolos matemáticos ya que éstos facilitan el pensamiento a algunos estudiantes, pero se lo podrían obstaculizar a aquellos para quienes dichos símbolos carezcan de significado (McCloskey, Lloyd y Lynch, 2019). Además de lo anterior, según McCloskey, Lloyd y Lynch, (2019) también se puede señalar que las corrientes psicológicas cognoscitivistas y constructivistas han alcanzado "el predominio en el campo de la investigación del aprendizaje humano, y han acumulado evidencias suficientes para afirmar que la mayoría de los aprendices de Matemática" (p. 2), sobre todo los de la superior, "necesitan trabajar con modelos y representaciones concretas de los conceptos y principios matemáticos antes de que ellos puedan comprender significativamente las formas matemáticas, abstractas y simbólicas, que corresponden a tales representaciones o modelos" (Hilton y Hilton, 2019, p.13).

Estos planteamientos de Indra y Kusumah, (2017):

> "se apoyan en resultados teóricos según los cuales los estudiantes aprenden mejor las ideas y los conceptos cuando les es permitido que los descubran por si mismos a través de experiencias relacionadas con el mundo físico o entorno socio-ambiental en el que se hallan inmersos; o manipulando modelos representativos de dichas ideas y conceptos" (p.1).

"Estos modelos contribuyen a darle sentido a los símbolos y al vocabulario abstracto de la Matemática; además, mediante su uso, los procesos de la Matemática pueden hacerse más significativos" (Jankvist y Misfeldt, 2019, p. 12). Puede concluirse, entonces, que el "aprendizaje de la Matemática consiste en desarrollar un saber hacer autónomo, vinculado con la activación de procesos de funcionamiento intelectual lo cual se ve favorecido cuando se usan modelos (materiales manipulables) y se aplica la Matemática a situaciones con las que el alumno está familiarizado" (Ma *et al.,* 2015, p. 13); esta concepción sobre el aprendizaje, hace que resulte necesario el señalamiento de la necesidad de que se establezcan nuevos propósitos del hacer matemático en ámbitos escolares (Darlington, 2019). Corno consecuencia de lo anterior, los “fines que le son asignados a la enseñanza de la Matemática ya no son sólo los relativos a la manipulación de símbolos y la ejecución de algoritmos” (Miller y Cadwallader, 2019, p.2). Hoy, como resultado del pre-dominio de los enfoques cognoscitivos en educación, se considera más importante hacer énfasis en “los procesos del pensamiento matemático y no en la mera transmisión de contenidos; a partir de aquí se deriva una concepción de la enseñanza de la Matemática” que se preocupa por desarrollar y fortalecer en los alumnos un modo matemático de pensar, para lo cual resulta imprescindible mostrar una imagen auténtica de lo que es la Matemática (Jankvist y Misfeldt, 2019, p.3).

En efecto, la forma tradicional predominante en su enseñanza ha llevado a muchas personas a creer que la Matemática es un rígido sistema que consta sólo de símbolos y de un conjunto de reglas para operar con ellos. Esta distorsionada imagen de la Matemática es reforzada por la utilización de libros de texto que enfatizan la manipulación de signos, ecuaciones, y otros modos de denotar las definiciones en Matemática (Mendoza y Rivero, 2019). A los estudiantes se les exige que inviertan la mayor parte de su tiempo practicando la ejecución de algoritmos en la realización de ejercicios que son réplicas de otros que previamente le han sido mostrados por el docente o están resueltos en el libro y que han de servir de modelo guía; estos son los denominados "ejercicios modelo" (Weiland, Orrill y Nagar, Brown y Burke, 2020). Con base en la ejecución reiteradamente reforzada de esta actividad, en los estudiantes llega a formularse la creencia errónea según la cual aprender Matemática consiste en el aprestamiento para conocer y luego manipular símbolos de manera precisa y rápida.

Para Winsløw, (2007, p.20) existe “la necesidad de mostrar una imagen auténtica de la Matemática obliga a introducir cambios en el contenido y en la forma como se enseña esta asignatura, colocando el énfasis en la comprensión de los procesos matemáticos que están implicados en la ejecución” de las operaciones de cálculo y no sólo en la realización rutinariamente mecánica de estas. Para ello es necesario tener la atención del estudiantado modificando el modo de presentación del contenido matemático, e incluyendo otros aspectos vinculados con la Matemática que habitualmente no son tomados en cuenta (Winsløw, 2007).

Es imprescindible recurrir a técnicas y medios para presentar información diferente a los tradicionales (marcador, tiza, pizarrón); y desarrollar una enseñanza vivencial de la matemática, vinculando el contenido a ser enseñado con aspectos de la vida real: organizando juegos matemáticos, recurriendo a hechos históricos, mostrando aspectos relevantes de la vida de grandes matemáticos; todo ello contribuye a desarrollar actitudes positivas hacia la Matemática, lo cual es imprescindible para el aprendizaje de esta disciplina. Efectivamente, se ha comprobado que existe una correlación positiva entre la actitud del estudiante y su rendimiento académico; por ello, es necesario el desarrollo de actitudes favorables hacia la Matemática según Mendoza y Flores, (2018). Esto podría lograrse haciendo que el alumno se involucre personalmente en su propio aprendizaje, brindándole oportunidades de participar en experiencias que le permitan aprehender significativamente los conceptos matemáticos; es imprescindible hacer que los estudiantes sientan satisfacción al estudiar Matemática, creando una atmósfera que les permita disfrutar del estudio de la Matemática, ayudándolos a desarrollar confianza en su propia habilidad para dominarla, mediante la realización exitosa de actividades vinculadas con situaciones que le son familiares, atractivas e interesantes. Esto no significa, en modo alguno, exponerlos a cuestiones triviales; al contrario, las situaciones de Memoretoy desafío de disposición en las matemáticas propician el abordaje de la ciencia numérica con fines educativos, estas dinámicas han de ser desafiantes y propiciatorias de exigencias intelectuales cónsonas con el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos (Godino, Rivas, Burgos y Wilhelmi, 2019).

Con ello se contribuye a desterrar la idea de que la Matemática es aburrida, árida, inútil, difícil de comprender, inhumana; y combatir los mitos y tabúes que se han creado a su alrededor. Esta tarea de (re)situar a la Matemática como un ámbito de estudio atractivo, agradable, útil, vinculado con las realizaciones humanas, exige cambios de las prácticas que los docentes que enseñan Matemática ponen en juego durante sus acciones didácticas en el aula de clases de Matemática.

Para esto hace falta:

(a) orientar el proceso de enseñanza de un modo tal que predomine el descubrimiento, por parte de los estudiantes, de las nociones matemáticas estudiadas.
(b) mostrar las aplicaciones que la Matemática tiene en la Ciencia y la Tecnología.
(c) evidenciar que la Matemática es un quehacer esencialmente humano, haciendo referencia a la vida de los matemáticos.

Todo lo antes expuesto debe estar enmarcado en una búsqueda de nuevos motivos que hagan atractivo el estudio de la Matemática. Hay que hacerle ver al estudiante que debe estudiar Matemática no sólo por sus rasgos intrínsecos, para ello es menester relacionarla con la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, y mostrar todos estos elementos en sus interrelaciones mutuas. Además, se ha de mostrar que la Matemática es un quehacer humano; de este modo se reivindica al sujeto que hace la Matemática; una forma de lograrlo es reconociendo la posibilidad de equivocarse, admitiendo el carácter didáctico del error, lo cual contrasta con la presunta infalibilidad de la Matemática.

Estos son los principios que subyacen en la enseñanza didáctica de la Matemática que, como propuesta didáctica orientada hacia el mejoramiento del PEMT, se desarrolla en el modelo al cual sirve de base este libro.

La Educación Matemática

Para Cai, Hwang y Robison (2019), la forma de categorizar las orientaciones teóricas de la investigación y los análisis de la naturaleza de la cognición matemática, cómo se aprende y cómo este aprendizaje se puede mejorar de manera óptima, es refiriéndose a las amplias tradiciones paradigmáticas dentro de la psicología y la educación en general, entre estas teorías se encuentran el conductismo, la tradición empirista, el modelo cognitivo / racionalista y situacional / la pragmática-sociohistórica y en especial el modelo didáctico. Estas teorías generales han influido en gran medida y siguen influyendo en el campo de la educación matemática.

La tradición conductista / empirista incluye asociacionismo, conductismo y conexionismo. Según este punto de vista, el conocimiento y las habilidades matemáticas son el resultado de una acumulación de asociaciones y habilidades adquiridas. Un ejemplo clásico de esta tradición es Thorndike, quien aplicó su visión asociacionista sobre el aprendizaje (como fortalecimiento diferencial de asociaciones por refuerzo) al aprendizaje de la aritmética. Aunque esta tradición juega un papel menor en la investigación contemporánea, sus ideas aún penetran en las prácticas educativas actuales: por ejemplo, en los enfoques de ejercicios y prácticas. Conceptos de matemáticas que proporcionan respuestas correctas a tareas matemáticas bien definidas, de aprendizaje de las matemáticas como incremental con errores que deben evitarse o eliminarse de inmediato (Thorndike y Bruce, 2000).

La perspectiva cognitiva / racionalista involucra tradiciones de investigación como la psicología Gestalt, el procesamiento de información simbólica y el constructivismo. Estas tradiciones conciben el conocimiento matemático como entidades mentales universales ubicadas en los estudiantes individuales, como los esquemas cognitivos y las reglas de procedimiento, y definen el aprendizaje de las matemáticas como cambios en estos esquemas y reglas mentales universales. Representantes típicos de esta tradición son Piaget, quien teorizó el desarrollo matemático en términos de la adquisición escalonada de estructuras lógico-matemáticas cada vez más complejas; Wertheimer, quien enfatizó la detección perspicaz y la explotación de la estructura en el pensamiento y el aprendizaje matemáticos; y teóricos del procesamiento de la información como Simon, Anderson y

Siegler, quienes realizaron análisis detallados de las estructuras y procesos cognitivos involucrados en la adquisición y uso de conceptos y habilidades matemáticos clave. Los procesos de aprendizaje matemático en lugar de los resultados del aprendizaje, prestando amplia atención al papel del conocimiento previo, valorando la comprensión conceptual y la resolución de problemas además de la fluidez procedimental, recuerdan esta segunda perspectiva (Shreiner y Dykes, 2021).

La perspectiva situacional / pragmática-sociohistórica implica tradiciones como la etnografía, la antropología y la teoría de la situación. Este tercer marco abarca todas aquellas teorías que ven el aprendizaje de las matemáticas como una reorganización de actividad que acompaña a la integración de un alumno individual dentro de una "comunidad de práctica". Esta tercera tradición, que tiene sus orígenes en el trabajo de Vygotsky, surgió con fuerza a fines de la década de 1980 en reacción a la visión cognitiva entonces dominante del aprendizaje de las matemáticas como un proceso altamente individual y puramente mentalista de adquisición de conocimientos y habilidades que ocurre en el alumno.

En contraste con esta visión cognitivista, la perspectiva situada enfatiza que el aprendizaje de las matemáticas se realiza esencialmente en interacción con contextos y artefactos sociales y culturales, y especialmente a través de la participación en actividades y contextos culturales. Mientras que, desde el punto de vista cognitivista, las matemáticas se consideran un sistema de conocimiento universal, la perspectiva situacional / pragmático-sociohistórica asume que las matemáticas difieren según el entorno en el que se han desarrollado y en el que se practican. La influencia de esta perspectiva en la educación matemática se refleja en los intentos de implementar elementos de entornos de aprendizaje extraescolar exitosos en las matemáticas escolares, y una mayor atención al lado sociocultural y afectivo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Ball *etal.,* 2008).

La educación matemática como didáctica es una ciencia de hoy, que entra en el espacio de experiencia, se enfrenta a las expectativas de encontrar la "mejor" manera de enseñar el contenido de la ciencia numerica, de producir la respuesta correcta al éxito o fracaso de los estudiantes para aprender algo, de decir algo relevante cuando se trata de los resultados de las pruebas internacionales de conocimiento matemática. La didáctica como ciencia crítica necesita herramientas analíticas para capturar el significado de sus historias y herramientas conceptuales para explorar los procesos de selección y creación de significado como problemas de investigación. Sus raíces continentales en una tradición filosófica la han proporcionado. La teoría del currículo, con un espacio de experiencia diferente, ha proporcionado otras, herramientas que responden al llamado a la contextualidad que está incrustado en la didáctica continental como ciencia.

Por lo tanto, en la educación matemática “didáctica” es un término más generalizado que se refiere a la teoría y las aplicaciones prácticas detrás de la ciencia de la instrucción. También puede ser visto como la base o los pasos y etapas principales involucrados en el acto de enseñar, dentro de un campo específico. En el campo de la ciencia, hablamos de investigación, por ejemplo, perteneciente a la didáctica de la biología y la medicina, por ejemplo. En este contexto, la didáctica de la transferencia de conocimientos a menudo tiene lugar a través de la enseñanza en un entorno tradicional (anfiteatro) al inicio, pero lo más importante es a través de sesiones prácticas de ejercicios o demostración de problemas matemáticos (Diamond, 2019).

La Lógica

La historia de la lógica documenta el desarrollo tal como ocurre en varias culturas y tradiciones de la historia. Si bien muchas culturas han empleado intrincados sistemas de razonamiento, la lógica se emplea como análisis explícito de los métodos de razonamiento la cual recibió un desarrollo sostenido originalmente solo en tres tradiciones: China, India y Grecia. Aunque las fechas exactas son inciertas, especialmente en el caso de la India, es posible que la lógica surgiera en las tres sociedades en el siglo IV a. C. Las nociones de sistemas de razonamiento y lógica, sin embargo, son lo suficientemente imprecisas como para que se hayan dado varias respuestas a las preguntas sobre qué son y cómo deben entenderse. El tratamiento formalmente sofisticado de la lógica moderna desciende de la tradición griega, pero no proviene completamente de Europa, sino que proviene de la transmisión de la lógica aristotélica y los comentarios sobre ella de los filósofos islámicos a los lógicos de la Europa medieval (Cai *et al*, 2017),

El término "lógica" proviene de la palabra griega logos, que a veces se traduce como "oración", "discurso", "razón", "regla" y "razón". Por supuesto, estas traducciones no son suficientes para ayudarnos a comprender el significado más especializado de "lógica" tal como se usa hoy. Entonces, ¿qué es la lógica?, para Hempbel (1997), la lógica es como el estudio de los principios del razonamiento correcto. Una cosa que se debe tener en cuenta sobre esta definición es que la lógica se ocupa de los principios del razonamiento correcto. Estudiar los principios correctos del razonamiento no es lo mismo que estudiar la psicología del razonamiento. La lógica es la disciplina anterior y nos dice cómo debemos razonar si queremos razonar correctamente. Si la gente sigue realmente estas reglas de razonamiento correcto es una cuestión empírica, algo que no es asunto de la lógica.

La psicología del razonamiento, por otro lado, es una ciencia empírica. Nos informa sobre los hábitos de razonamiento reales de las personas, incluidos sus errores. Un psicólogo que estudia el razonamiento podría estar interesado en cómo varía la capacidad de razonamiento de las personas con la edad. Pero tales hechos empíricos no interesan al lógico (Chernikov, 2014). A veces se hace una distinción entre lógica informal y lógica formal. El término "lógica informal" se utiliza a menudo para significar lo mismo que pensamiento crítico. A veces se utiliza para referirse al estudio de razonamientos y falacias en el contexto de la vida cotidiana. La "lógica formal" se ocupa principalmente de los sistemas formales de lógica. Se trata de sistemas especialmente construidos para la realización de demostraciones, donde los lenguajes y las reglas del razonamiento están definidos de forma precisa y cuidadosa. La lógica oracional (también conocida como "lógica proposicional") y la lógica de predicados son ejemplos de sistemas formales de lógica (Wagner, 2019).

Hay muchas razones para estudiar lógica formal. Una es que la lógica formal nos ayuda a identificar patrones de buen razonamiento y patrones de mal razonamiento, de modo que sepamos cuáles seguir y cuáles evitar. Por eso, el estudio de la lógica formal básica puede ayudar a mejorar el pensamiento crítico. Los lingüistas también utilizan sistemas formales de lógica para estudiar los lenguajes naturales. Los informáticos también emplean sistemas formales de lógica en la investigación relacionada con la inteligencia artificial. Finalmente, a muchos filósofos también les gusta usar la lógica formal cuando se enfrentan a problemas filosóficos complicados, para hacer su razonamiento más explícito y preciso.

La lógica matemática se entiende mejor como una rama de la lógica o las matemáticas. La lógica matemática a menudo se divide en los subcampos de la teoría de modelos, la teoría de la prueba, la teoría de conjuntos y la teoría de la recursividad. La investigación en lógica matemática ha contribuido y ha sido motivada por el estudio de los fundamentos de las matemáticas, pero la lógica matemática también contiene áreas de matemáticas puras que no están directamente relacionadas con cuestiones fundamentales. Por otra parte según Cole, (2003) la lógica matemática es el estudio de las fortalezas y limitaciones de los lenguajes formales, las pruebas y los algoritmos y sus relaciones con las estructuras matemáticas. También tiene como objetivo abordar cuestiones fundamentales en matemáticas. La lógica se relaciona con la informática teórica a través de la teoría de la computabilidad y la teoría de la prueba, con el álgebra, la teoría de números y la geometría algebraica con la teoría de modelos, y con el análisis y la teoría ergódica mediante la teoría de conjuntos y la combinatoria infinita.

Un tema unificador en la lógica matemática es el estudio del poder expresivo de la lógica formal y los sistemas de prueba formales. Este poder se mide tanto en términos de lo que estos sistemas formales pueden probar como en términos de lo que son capaces de definir. Por tanto, se puede decir que "la lógica matemática se ha convertido en el estudio general de la estructura lógica de las teorías axiomáticas". (Parsons, 1967, p.206). A nivel general la lógica matemática presenta una introducción completa a los métodos formales de lógica y su uso como una herramienta confiable para el razonamiento deductivo, pero en Ecuador es ajeno a esta situación; es relativamente fácil constatar que en nuestra república el aprendizaje de la Matemática sigue siendo un paradigma nacional.

Cabe entonces preguntarse, ¿cómo enseñar Matemática hoy con la mirada puesta en el futuro? Algunas instituciones, con influencia mundial, han ofrecido respuestas; una de ellas es el NCTIVI (Consejo Nacional de Profesores de Matemática) de los EE.UU, que ya desde 1989, identificó cinco grandes metas que se requieren alcanzar para satisfacer las necesidades matemáticas de los estudiantes con miras a incrementar sus posibilidades de desenvolvimiento idóneo en el contexto de la nueva era por la que está transitando la humanidad en estos instantes. Guardando las distancias y haciendo las correspondientes adaptaciones, las metas propuestas por el NCTM podrían ser una referencia útil para el contexto ecuatoriano. De acuerdo con el NCTM, la enseñanza de la Matemática debe propender a que los estudiantes estén en condiciones de:

1. Apreciar el valor que la Matemática tiene para un desarrollo social adecuadamente sostenible. En este sentido, los estudiantes deben tomar conciencia acerca de los variados roles desempeñados por la Matemática en la sociedad; reconociendo su presencia en las más disímiles actividades, tanto las cotidianas como las altamente especializadas propias de la investigación científica; así mismo, deben poder reconocer su uso tanto en los debates sobre decisiones de políticas gubernamentales públicas, que directamente les afectan, como en la investigación de mercados. Por lo tanto, las experiencias matemáticas de los estudiantes en las universidades, deben llevarlos a la convicción de que la Matemática tiene valor para ellos; esto podría servirles de incentivo para estudiarla durante su transitar por la universidad.
2. Razonar con un sentido matemáticamente crítico. Para esto es imprescindible reconocer que la Matemática es, por encima de cualquier otra cosa, un hábito mental que ayuda a clarificar situaciones complejas; por ende, los estudiantes deben aprender a recabar evidencias, formular conjeturas, diseñar modelos, inventar contraejemplos, y construir argumentaciones sólidas, así como también exigirlas a quienes tienen el poder de decisión sobre la ejecución de acciones que tendrán impacto directo sobre sus condiciones de vida. Ofrecerles evidencia de que un modo de pensar agudo y escépticamente contextualizado se logra mediante la participación en procesos idóneos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, hará que esta disciplina sea más valorada socialmente por los estudiantes.
3. Manejar idóneamente distintos modos de comunicar el conocimiento propio de la Matemática. La enseñanza de la Matemática debe desplegarse de un modo tal, que haga posible que los estudiantes aprendan a escribir, leer y hablar acerca de los temas propios de ella; sin embargo, esto no es suficiente, es menester además que el conocimiento matemático adquirido sea aplicado en el abordaje de situaciones problemáticas cercanas a la realidad del estudiante; de este modo, la Matemática es asumida como una herramienta para la comprensión de tales situaciones; esta perspectiva comunicacional del aprendizaje de la Matemática no es alcanzable en solitario; de allí que resulten pertinentes las estrategias que propicien diálogos e interacciones entre los aprendices, tales como el trabajo en grupos y la mediación por pares donde se genera enseñanza mutua; estas instancias requieren que cada quien argumente a favor de sus respectivas estrategias de trabajo usadas en el proceso de buscar solución a problemas, cuestión ésta que ha de realizarse tanto en forma oral como de modo cuidadosamente escrito.
4. Resolver problemas matemáticos situacionalmente contextualizados. En su cotidianidad, en el presente libro se plantean problemas abstractos donde los estudiantes y participantes en común se ven en la necesidad de resolver problemas de los más variados tipos, muchos de los cuales requieren la aplicación de conocimientos matemáticos de distinto nivel; por este motivo, los estudiante en la universidad han de tener experiencias vivenciales de resolución de problemas, que

les permitan familiarizarse con los diversos recursos heurísticos que se pueden aplicar en la búsqueda de solución a problemas matemáticos; por tanto, deben contar con múltiples oportunidades para entrar en contacto con problemas que varíen en cuanto a contexto de emergencia, grado de dificultad, nivel de las condiciones definitorias del problema, y posibilidades de abordaje, entre otros aspectos. Por tanto, el proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática, debe propiciar oportunidades para que los alumnos aprendan a: construir problemas matemáticos a partir de situaciones reales, generalmente abiertas, ambiguas o difusas, en la que la Matemática está subyacente y no es ostensible; seleccionar estrategias apropiadas para resolver problemas; reconocer y formular varias soluciones cuando sea posible; y trabajar con otros con el fin de analizar la idoneidad, en cuanto a efectividad y lógica, de las soluciones propuestas.

5. Fortalecer su Auto-concepto Matemático. En general, la imagen social que se tiene de la Matemática es que ésta es un territorio accesible sólo a quienes cuentan con una mente especialmente dotada para las abstracciones, para el manejo de lo simbólico; de allí que muchas personas se autoexcluyen de la posibilidad de desarrollar su correspondiente formación matemática y, con ello, se incremente el índice de Analfabetismo Matemático; algunos padres proyectan esta distorsionada imagen hacia sus hijos quienes, al llegar a la escuela, desarrollan lo que se denomina Mate-fobia, o rechazo a la Matemática. Así que las instituciones de educación superior tienen el compromiso de superar esta anomalía actitudinal, propiciando situaciones que coadyuven a que los alumnos incrementen sus niveles de confianza en cuanto a sus propias posibilidades de trabajo con la Matemática y, con ello, ayudarles a fortalecer su Autoconcepto Matemático; en esto se reconoce que existe una relación de influencia mutua entre actitudes positivas hacia la Matemática y el logro académico en esta disciplina; por ende, las experiencias escolares han de ser tales que le brinden al alumno la oportunidad de vivencias que él sí es capaz de resolver problemas matemáticos, que sí puede apropiarse de sus conceptos, objetos, procedimientos y procesos; con ello se incrementa la posibilidad de desarrollar autoconfianza hacia la Matemática, lo cual contribuiría a mejorar la, imagen que se haya podido formar de esta disciplina.

En el logro de las metas antes explicitas, los docentes que enseñan Matemática en los diversos niveles modalidades del sistema educativo ecuatoriano, tienen una responsabilidad esencial; en especial a nivel universitario, por ser el pilar fundamental de los futuros profesionales, como también de las universidades formadoras de docentes en ciencias experimentales, en efecto, es sabido que la atracción positiva hacia el estudio de una determinada disciplina está vinculada con la participación consciente y vivencial en experiencias de contacto placentero con la misma; de allí que quienes enseñen Matemática han de procurar la creación de contextos edumáticos, es decir, según Fernández, Gavilán y González, (2019), se trata de aquellos contextos en los que la Matemática es tratada con finalidades educativas donde se propicien emociones agradables que promuevan el disfrute en el estudio, desafíen intelectualmente al estudiante, y le hagan ver qué la Matemática es un bien cultural (y por ende una creación social) a cuyo acceso él tiene derecho.

Teoría de la Transposición Didáctica

Esta fue planteada por Chevallard (1985) y tuvo su origen en la didáctica de la matemática. Su intención fue “remitir al paso del saber sabio al saber enseñado” (p.11). Es decir, intentó estudiar y aportar la idea de que la diferencia entre el conocimiento científico y el conocimiento que aprende el alumno es el producto del saber sabio y el saber de los contenidos que se aprenden en la escuela.

Al comprender en esta teoría, la didáctica de la matemática como una reflexión para considerar el quehacer docente y su relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, se pueden señalar tres elementos que constantemente se encuentran en interacción durante dicho proceso, el saber, el docente y los estudiantes los cuales van a constituir el sistema didáctico (Chevallard, 1985).

Desde esta perspectiva, La Teoría de la Transposición Didáctica puede ilustrarse de la siguiente manera: Si se quiere facilitar un contenido matemático en educación primaria, como el conjunto de fracciones hay que adaptarlos de acuerdo con la edad y conocimientos previos del estudiante, es decir buscar ejemplos concretos y hacerlos accesibles. Por ejemplo, en matemática, la definición de fracciones viene dada mediante los números racionales, y ésta se enuncia de la siguiente manera: “Todo entero es racional y por tanto los números fraccionarios complementan a los enteros dando lugar, entre todos al conjunto de números racionales” (Galdós, 2005, p.161).

Esta definición, antes descrita se considera compleja para los estudiantes de sexto grado por lo que se ha de transformar por otras más sencillas como, una fracción representa las partes de una unidad y se expresa de la forma a/b, donde a es el numerador y b es el denominador, incluso se sus ejemplos deben mostrarse de manera concreta (envases de jugos, botellas, leche, entre otros) para que el estudiante construya su conocimiento. Por ello, la frase “transposición didáctica” (Chevallard, 1985) para referir la transformación que sufre el saber matemático como ciencia y adaptarlo al saber enseñado. “Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que lo harán apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza” (p.45). Ahora bien, Chevallard (1986) plantea que: “El sistema didáctico se encuentra rodeado por la noosfera” (p.27), la cual puede ser entendida como el propio contexto donde se desenvuelve el alumno integrada por los docentes, el personal directivo, los representantes del sistema educativo, padres y representantes que, de alguna manera, van a colaborar y contextualizar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La Teoría Crítica

Al utilizar el término "teoría crítica" me hace referencia a la Escuela de Frankfurt, pero la teoría crítica es más amplia que la versión desarrollada por los exiliados germano-americanos. En el contexto de la teorización y reconstrucción de la educación contemporánea, se debe incluir la tradición de la pedagogía crítica, el pragmatismo deweyano y el postestructuralismo. También se encuentran las teorías críticas del género, la raza, la sexualidad y las construcciones de la subjetividad que se han desarrollado a partir de una amplia gama de formaciones teóricas en los últimos años. Estos temas pueden enriquecer la pedagogía crítica y ayudar al proyecto deweyano de democratizar y reconstruir la educación para que los objetivos de justicia social y transformación progresiva puedan informar la pedagogía y la práctica (Felluga, 2015).

El concepto metateórico de "teoría crítica" como concepto de cobertura para este libro significa la dimensión crítica, las aspiraciones teóricas y la dinámica política que se esforzará por vincular la teoría y la práctica educativa. La concepción de "crítica" es sinóptica y amplia, abarcando "crítica" en el sentido griego del verbo krinein, que significa discernir, reflexionar y juzgar y "teoría" en el sentido del sustantivo griego theoria que se refiere a una forma de ver y contemplar. La crítica griega está arraigada en la vida cotidiana y se ejemplifica en la práctica socrática de examinar la vida social, sus instituciones, valores e ideas dominantes, así como el propio pensamiento y acción. La crítica se convirtió en el centro del proyecto de la Ilustración de criticar la autoridad y legitimar las propias posiciones intelectuales y políticas.

El sentido kantiano de la crítica, por ejemplo, exigía poner en cuestión todas las ideas de la razón, la moral, la religión, la estética y otras ideas dominantes para ver si podían estar bien fundamentadas y legitimadas. La crítica kantiana tiene como objetivo la autonomía frente a los prejuicios y las ideas mal fundamentadas y requiere una reflexión rigurosa sobre los propios presupuestos y las posiciones básicas, así como la argumentación para apoyar las propias posiciones. La teoría crítica se basa también en un concepto hegeliano de la crítica al criticar las posiciones unilaterales (como la tecnofobia frente a la tecnofilia) y desarrollar perspectivas dialécticas más complejas que rechazan y descuidan los rasgos opresivos o falsos de una posición, al tiempo que se apropian de los aspectos positivos y emancipadores. La teoría crítica adopta un concepto hegeliano de teoría al desarrollar teorías holísticas que intentan conceptualizar la totalidad de un campo determinado, pero que, de manera importante, establecen conexiones y articulan contradicciones, superando las teorías idealistas o reductoras del conjunto.

Una teoría crítica de la educación también se inspira en la crítica marxiana, subrayando la importancia de la crítica de la ideología y situando el análisis de un tema como la educación dentro de las relaciones sociales dominantes y del sistema de economía política. El proyecto marxiano criticaba sistemáticamente los supuestos de una disciplina hegemónica establecida, como en la crítica de la economía política de Marx, y construía una teoría y una práctica alternativas para superar las limitaciones y los rasgos opresivos de las instituciones y los sistemas de producción establecidos. La crítica marxiana implica un examen radical de las ideologías y prácticas de educación existentes y la necesidad de una transformación pedagógica y social para liberar a los individuos de las cadenas del capitalismo de consumo y ayudar a hacer posible una cultura y una sociedad más libres, democráticas y humanas. Teóricos marxianos como Gramsci criticaron las formas en que la educación y la cultura italianas reproducían las ideologías de la burguesía y luego del fascismo, reclamaron un proyecto cultural contrahegemónico que abarcara instituciones alternativas, desde la escuela hasta el teatro y el periodismo, para ayudar a construir una sociedad socialista y democrática. En nuestra época, como ha demostrado Popkewitz, (1988) Herbert Marcuse llevó a cabo una crítica sostenida del sistema educativo existente como modo de reproducción del sistema de dominación y opresión existente y reclamó contra instituciones y pedagogías para promover la transformación social democrática y el pleno desarrollo de los individuos. La teoría crítica en la educación se trata de cuestionar cómo nuestro sistema educativo puede ofrecer mejor educación a todas las personas. Ofrece oportunidades y comprensión de las diferentes perspectivas de los miembros desfavorecidos de la sociedad.

En términos de la Teoría Crítica en la Educación, Marx evaluaría las formas en que la educación y las interacciones en el aula se construyen socialmente y hasta qué punto estas interacciones se basan en lo que los participantes creen realmente que es correcto. Aunque gran parte de su filosofía está teñida de una especie de determinismo, una idea de que la estructura social puede definir y limitar el pensamiento humano, un principio central de la Teoría Crítica es la creencia de que el cambio es posible, por muy grandes que sean los obstáculos a ese cambio. Como explica Chernikov, (2014), si el examen de la opresión se lleva a cabo sin esperanza de cambio, es una empresa estéril, que inculca la desesperanza en los estudiantes, lo que, a su vez, sólo puede desanimar aún más a los estudiantes que, a su vez, sólo puede desanimar a los individuos a buscar la emancipación y el cambio. En la única razón para dedicar tiempo y energía a entender la opresión es para poder desmantelarla (Colás, 1994).

Las teorías críticas de la educación reconocen que (a) los sistemas educativos son, como mínimo, cómplices de la opresión (aunque muchos irían más lejos y afirmarían que estos sistemas son el mecanismo más poderoso para la reproducción de la desigualdad social), y (b) debe haber debe haber un plan correspondiente de acción emancipadora a través de la educación. Los mecanismos de opresión y las oportunidades para crear un cambio existen simultáneamente en dos aspectos importantes de la educación: la naturaleza del plan de estudios y las pedagogías de los profesores. Así pues, los profesores deben explorar sus funciones e ideologías para evitar perpetuar las construcciones negativas de sus alumnos, y también deben luchar contra los contenidos curriculares excesivamente prohibidos y, a menudo, engañosos, que consideran a los alumnos pobres y de las minorías como deficientes, mientras que y de las minorías como deficientes, al tiempo que enseñan, abierta o encubiertamente, la lección de que en la sociedad contemporánea todo es justo y equitativo (Habermas, 1966).

Así, en la educación matemática como en otros ámbitos, la Teoría Crítica explora la dialéctica y la didáctica entre la conciencia y la reflexión, por un lado, y la realidad social externa, por otro (Delgado, 2015). Ambos elementos, el yo y la realidad social externa, están situados histórica, geográfica y culturalmente, por lo tanto, la teoría crítica rechaza la idea de que de que puede haber una única "solución" para los problemas matemáticos. En cambio, la Teoría Crítica ofrece una manera de examinar la situación y el sentido de uno mismo en la estructura social y la historia más amplias. Por otra parte, Kellner (2003) realiza la contrastación entre teoría crítica y la educación matemática, obteniendo como resultado la educación matemática crítica, esta se puede caracterizar en términos de preocupaciones como: abordar la exclusión social y la supresión, trabajar por la justicia social, abrir nuevas posibilidades para los estudiantes y abordar críticamente las matemáticas en todas sus formas y aplicaciones.

De igual forma para Kellner (2003) las matemáticas se consideran tradicionalmente como la más neutral de las disciplinas, la más alejada de las discusiones y polémicas de la política y la vida social. Sin embargo, la matemática crítica desafía estos supuestos de neutralidad y ataca activamente la idea de que las matemáticas son puras, objetivas y neutral en cuanto a valores. Sostiene que la historia, la sociedad y la política han dado forma a la sociedad y la política han moldeado las matemáticas, no sólo a través de sus aplicaciones y usos, sino también sus conceptos, métodos e incluso la verdad y las pruebas matemáticas son el medio mismo de establecer la verdad. La educación matemática crítica también ataca la neutralidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mostrando cómo son actividades cargadas de valores e indisolublemente ligadas a la vida social y política. En cambio, sostiene que los valores de apertura, dialogicidad, criticidad hacia opinión recibida, el empoderamiento del alumno y el compromiso social/político y la ciudadanía son dimensiones necesarias de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, si se quiere contribuir a la democracia y la justicia social, estas visiones se encuentran ligadas especialmente al presente libro mediante el diseño de retos matemáticos, el cual busca la forma de establecer nuevos modelos de enseñanza didáctica y razonamiento matemático.

Críticas a la Enseñanza Tradicional de la Matemática

El método tradicional se basa en la teoría del aprendizaje conductista. El conductismo se refiere a las teorías de aprendizaje que hacen hincapié en el cambio de comportamiento que resulta de las asociaciones de estímulo-respuesta de los alumnos y afirma que el aprendizaje es un cambio de comportamiento debido a la experiencia (Lessani et al., 2017). En una clase de matemáticas que utiliza el método tradicional, el profesor repasa el material anterior y los deberes, luego hace una demostración de resolución de problemas de bajo nivel, seguida de actividades imitando la demostración del profesor.

Este enfoque pedagógico pone el foco principal en el profesor como transmisor de conocimientos (es decir, enseñar contando) es representativo de la teoría conductista. El método común de enseñanza de las matemáticas con el método tradicional está centrado en el profesor y la situación dominante es dar una conferencia. Los métodos educativos tradicionales se siguen utilizando ampliamente en las escuelas, el enfoque tradicional del aprendizaje de las matemáticas se produce cuando los alumnos son guiados a través de un plan de estudios establecido de conceptos matemáticos por un educador/profesor experto (Cejas et al., 2021). ¿Qué vemos cuando entramos en un aula donde se utilizan métodos tradicionales? Vemos que los alumnos suelen estar sentados, lo que permite que todos tengan una visión clara del profesor al frente de la clase. Observamos que el profesor tiene el papel principal. Él/ella enseña un nuevo concepto, asegurándose de que relaciona el nuevo concepto con los conceptos previamente aprendidos por los alumnos. El profesor suele utilizar una pizarra blanca o negra para trabajar con una breve serie de ejemplos y explicar el concepto. Lo más probable es que el profesor quiera pedir ideas a los alumnos a medida que se resuelven los problemas, hacerles partícipes del concepto matemático y tal vez estimular el pensamiento de los alumnos.

Una vez que el profesor introduce el nuevo concepto, los alumnos tienen la oportunidad de poner en práctica sus nuevos conocimientos. Esto suele implicar la resolución de problemas y ejercicios de Matemáticas en su manual o en hojas de trabajo. Los alumnos trabajan individualmente en la resolución de problemas, mientras el profesor se pasea por la clase y da explicaciones adicionales cuando es necesario. Los alumnos también pueden pedir ayuda directamente al profesor (levantando la mano) cuando tengan un problema que no puedan resolver por sí mismos. Al final de la lección, el profesor vuelve a trabajar con toda la clase y se centra en abordar las preguntas o problemas más difíciles, reforzando el nuevo concepto/noción enseñado y destacando el método correcto para resolverlos. Finalmente, el profesor asigna tareas para que los alumnos sigan practicando y consolidando las nociones que acaban de aprender. nociones recién enseñadas. Entre los métodos tradicionales de enseñanza-aprendizaje-evaluación en Matemáticas están la exposición y la ejercitación.

De esta forma se puede considerar como una crítica a la enseñanza basada en la concepción de la Matemática como "Ciencia Hecha". La visión de la enseñanza de la Matemática que la asume como una ciencia hecha, ha recibido severas críticas, algunas de las cuales se comentan a continuación. La enseñanza consiste en la transmisión de recetas que los alumnos deben aprender de memoria; como consecuencia, quienes llegan a la universidad lo hacen con un conjunto de preceptos que debieron aprender de memoria y, por ende, no saben cómo usarlos en la resolución de problemas. Este modo de enseñar, evidencia una preparación inadecuada por parte del docente quien, por no dominar hasta un nivel suficientemente elevado lo que está enseñando, cae en un dogmatismo repetitivo y desarrolla una enseñanza en la que él, es quien, prácticamente, ocupa toda la escena y desarrolla la totalidad de la actividad, condenando a los alumnos a adoptar una actitud de receptores pasivos de las informaciones que le suministra el docente, con todos los riesgos de comunicación que esto implica.

Por esta vía se llega a una situación en la que se enfrentan dos estructuras cognitivas (la del docente y la del estudiante) sin nexo vinculante alguno entre ellas. Esta modalidad de la enseñanza se justifica sobre la base de una pretendida ganancia de tiempo; en efecto, debido a lo largo de los programas, para Nick, (2019), si se le da, a los alumnos la oportunidad de "descubrir" por si mismos los conocimientos, entonces no habrá tiempo para abordar todos los contenidos programáticos; así que el docente "pasa" él mismo la materia para poder "cubrir" todo el programa.

Esta pretendida ganancia de tiempo es ilusoria cuando se la compara con la calidad de la formación matemática de los alumnos. Como trasfondo de esta actitud del docente está la intencionalidad que se le atribuye a la enseñanza: comunicar un conjunto de conocimientos hechos versus propiciar el desarrollo de la actividad intelectual del alumno. Otra de las razones que podría darse para explicar la persistencia de este enfoque en la enseñanza de la Matemática es la natural resistencia al cambio que tiene el ser humano; y, el explicable temor que todos poseen de ensayar cosas nuevas de cuya eficacia no se tiene total certeza. Dados sus efectos no deseados, es menester cambiar el status quo anteriormente descrito; sin embargo, esto no es sencillo; por el contrario, existen numerosos obstáculos en la trayectoria del cambio de orientación que ha de tener lugar eh la enseñanza de la Matemática en las instituciones educativas primarias, secundarias y universitarias; entre ellos están los que se mencionan a continuación.

Algunos Obstáculos para el cambio de orientación en la Enseñanza de la Matemática.

- La baja capacitación Matemática y pedagógica de los docentes. Sabido es que la preparación en Matemática de muchos de los docentes que enseñan esta asignatura en las escuelas y colegios ecuatorianos no es suficientemente idónea como para abordar desde una perspectiva superior, los contenidos propios de las matemáticas escolares; mucho más precario es el conocimiento didáctico asociado con tales contenidos puesto que en las instituciones de formación docente aún predomina la idea según la cual para enseñar matemática es suficiente "saber Matemática"; los alcances de este "saber" se concretan en la exposición de los estudiantes para profesor de Matemática a cursos de "alto nivel" en las áreas de Cálculo, Álgebra, Geometría, Análisis, etc. Son infrecuentes o nulos los cursos de Educación Matemática; esto trae como consecuencia un docente con escasa formación matemática (conocimiento matemático) y prácticamente nula formación en didáctica de la Matemática (conocimiento didáctico del contenido matemático). La solución de esta analítica visión crítica no radica en la realización de apresurados e informales "talleres"; se requiere un mejoramiento continuo del docente en actividad, no proporcionándole "recetas o formulas" sino colocándolo en la posibilidad de generar una profunda auto revisión y autocrítica de sus propias prácticas pedagógicas, no sólo de manera individual sino de manera colectiva.

- El peso de las rutinas y de las tradiciones pedagógicas en las que ha sido formado el docente. Según Miller & Cadwallader (2019), otro de los resultados de la investigación en formación inicial de profesores que enseñan Matemática es la comprobada incidencia que, sobre su desempeño profesional, tienen los modelos didácticos que han puesto en juego los docentes al participar en dicha formación; entre dichos modelos, el futuro profesor selecciona, aquellos que considera como mejores, y una vez graduado, los asume como referencia y trata de replicarlos en su práctica. Esto genera una natural resistencia al cambio y temor para ensayar lo "nuevo".
- Todo lo anterior se suma a la creencia de que el conocimiento matemático constituye una verdad absoluta. No obstante, a pesar de lo cristalizadas que están las prácticas tradicionales en la enseñanza de la Matemática, existen posibilidades de actuar para modificarlas; a continuación, se mencionan algunas acciones posibles.
    - Hay que admitir que la enseñanza de la Matemática no debe consistir en una transmisión de recetas. Según Hayal & Meral, (2020) los resultados de las investigaciones acerca del aprendizaje de los seres humanos indican que éste es más efectivo cuando el aprendiz se convierte en un protagonista de tal proceso; ello implica la necesidad de ofrecerle oportunidades para que participen activamente en experiencias que les permitan recorrer las diversas fases identificadas en la formación de conceptos y procesos matemáticos, que transitan desde lo concMemoretohasta lo abstracto.
- Por tanto, es menester que el docente sustituya su visión trans-misionista de la enseñanza por otra, en la cual, la Matemática deje se de ser vista como "ciencia hecha" y sea presentada como "ciencia a construir".
    - Ofrecer una visión auténtica de la Matemática. De la Matemática se han construido algunas imágenes sociales inadecuadas; Rowlett, Smith, Corner, O'Sullivan & Waldock (2019) señalan que con frecuencia a los alumnos se les oye decir que "la Matemática es sólo para genios", es decir, para personas excepcionalmente talentosas e inteligentes; o que "la Matemática fue inventada por personas que no tenían ninguna otra actividad"; estas expresiones ocultan la realidad del proceso histórico de desenvolvimiento de la Matemática como disciplina científica, impidiendo verla como una creación humana, desplegada en gran medida como consecuencia de la necesidad de resolver problemas prácticos (empíricos o conceptuales) que en diferentes contextos geográficos, históricos, sociales o culturales, han tenido que afrontar hombres y mujeres a lo largo del desenvolvimiento histórico de la humanidad.
- Por ende, resulta imprescindible recuperar esta visión humanística, en tanto que creación humana, de la Matemática; así que el docente que enseña esta disciplina ha de procurar vincular su enseñanza con la realidad cotidiana de sus alumnos y aprovechar su presencia en las aulas para hacerles partícipes en actividades que les permitan aproximarse vivencialmente con la Matemática, enfrentándolos a situaciones matemáticamente potentes, es decir, que les permitan a los alumnos oportunidades para explicitar su talento matemático.
    - Preocuparse, no sólo por el contenido a enseñar, sino también por el estilo y la forma de enseñarlo. No se trata sólo de enseñar rutinas de cálculo o técnicas matemáticas aisladas, sino, además, darle sentido a tales rutinas y técnicas mostrando los contextos en los que ellas han surgido, las aplicaciones que tienen y, sobretodo, su fundamentación subyacente. Así que es preciso, tener especial cuidado con el estilo que se use para presentar el contenido matemático que los alumnos deben abordar. En este sentido, se considera fundamental la presentación atractiva de situaciones problemáticas que requieran la aplicación de la teoría; con esto, el contenido matemático

adquiere relevancia para el alumno al vincularlo con un contexto que le da significatividad y sentido.

— Cambiar de sentido la tarea de planificación docente. Se dice que un docente de Matemática es un profesional experto en el reconocimiento, caracterización, y tratamiento de los fenómenos didácticos característicos de los encuentros edumáticos, es decir, aquellas situaciones sociales concebidas con la intencionalidad explícita de desarrollar la formación matemática de los alumnos; el diseño de tales encuentros exige tanto conocimiento disciplinario (o de contenido) como conocimiento didáctico asociado con dicho contenido, además de otros conocimientos necesarios para gestionar los procesos propios de un aula de clases (gerencia de aula); por tanto, diseñar un Encuentro Edumático no consiste sólo en "preparar clases" o "ver cuál es el objetivo que me toca dar hoy", ni "escoger los ejemplos que voy a explicar y los deberes o ejercicios que les voy a mandar a los estudiantes" ; muy por el contrario, concebir un Encuentro Edumático implica, entre otras muchas tareas, crear, adoptar o adaptar cuidadosamente las situaciones sociales, de aula en las que serán partícipes los alumnos; las mismas deben contemplar situaciones problemáticas cuya resolución exija razonamiento esforzado y que al mismo tiempo no queden fuera del alcance que les permite el desarrollo intelectual que hayan logrado los alumnos según su edad.

— Convertir la clase de Matemática en una oportunidad para que el alumno ejercite su creatividad. La producción de conocimientos constituye un desafío intelectual; por ello, el trabajo en el aula con la Matemática Escolar debe implicar prácticas análogas o equivalentes a las que representan una actividad matemática auténtica y ésta está vinculada con la resolución de problemas que son su corazón, como lo afirmara Stewart, Epstein y Troup, (2019). De allí que los problemas y los procesos de búsqueda de solución a los mismos es una actividad que debe estar cotidianamente presente en el trabajo escolar con la Matemática. Dichos problemas deben ser desafiantes, interesantes, cercanos a la realidad de los alumnos y, sobre todo, susceptibles de ser resueltos por al menos dos vías distintas, de modo que el alumno tenga oportunidad de manifestar su creatividad. Esto no es un proceso rápido; por ello, el docente debe tener paciencia y saber esperar. Los alumnos deben “disponer de un tiempo suficiente para activar todos sus mecanismos de funcionamiento intelectual cuando les corresponda enfrentarse al proceso de búsqueda de solución a un problema de Matemática” (Nortes y Nortes, 2016, p.2).

Para Santiago, Wim van y Lieven, (2008) se debe:

> “Cambiar la actitud del docente ante el trabajo de los estudiantes. Uno de los aspectos centrales de la didáctica de la Matemática actual es la consideración del alumno como un constructor activo de su propio aprendizaje de la matemática, ello implica que ha de brindársele espacios de libertad en su relacionamiento con los objetos y proceso matemáticos de los que se ha de apropiar con miras a desarrollar su formación matemática propia; por ello, el profesor de Matemática debe: brindar al alumno situaciones de aprendizaje basadas en el planteamiento de problemas que le resulten atractivos, y respetar las reacciones que los alumnos tengan ante ellos; apreciar, valorar y respetar las vías que el alumno seleccione para abordar los problemas planteados; además, el profesor debe resistirse a la tentación de sustituir los esfuerzos del alumno por los suyos propios; y, por el contrario, estimularle para que persevere en las buenas ideas que se le ocurran para solucionar un problema; una vez que el alumno ha arribado a alguna solución, el docente debe intervenir con el objetivo de orientar el proceso de formalización y de reflexión sobre la actividad realizada con el fin de mediar el proceso de generalización y transferencia” (p.14).

— Hacer ciertas modificaciones en cuanto a la orientación y al ámbito del contenido que se aborda en los diferentes cursos. Una de las críticas que con más frecuencia se hace al modo como tradicionalmente se conduce la enseñanza de la Matemática en las aulas de clase ecuatorianas, es la ausencia de vínculos con la realidad cotidiana de los alumnos; ello trae como consecuencia una sensación de inutilidad del estudio de esta ciencia (Rodriguez, Celorio y Gutierrez, 2019). Uno de los modos de evitar esto y de atraer al estudiante hacia la Matemática es mostrándole la vinculación que esta tiene con el entorno científico y tecnológico que caracteriza al desarrollo alcanzado por la humanidad en la actualidad; es imprescindible que el estudiante sea expuesto ante situaciones que le permitan apreciar cómo la Matemática ha coadyuvado a dicho desarrollo, esta podría ser una de las estrategias para mostrar la pertinencia y actualidad de la Matemática como disciplina científica. Esto implica que el docente de Matemática debe procurar ampliar su nivel de cultura general y, en la medida de lo posible, mantenerse al día de lo que ocurre en el campo de la ciencia y la tecnología.

  — Presentar la Matemática no como una disciplina aislada sino, por el contrario, mostrarla en sus vinculaciones con las demás disciplinas. Corno argumento para justificar el estudio de la. Matemática, habitualmente se hace referencia a sus valores intrínsecos, es decir, las cualidades que caracterizan al trabajo matemático en sí mismo: carácter deductivo de sus conclusiones apoyadas en contundentes evidencias hipotéticas; encadenamiento lógico de sus razonamientos; necesario esfuerzo intelectual para arribar a la solución de problemas, entre otras; así se muestra una idea de la Matemática en sí y por si misma; sin embargo, pocas veces se mencionan en las clases de Matemática los vínculos que ésta tiene con otras disciplinas tales como la Física, cuyo lenguaje, es decir, modo de expresarse, es la Matemática; o como la Química, muchos de cuyos procesos son ininteligibles si no se recurre a expresiones matemáticas; la Economía en la que conceptos como costo, precio, valor, ganancia y otros no menos fundamentales se hacen ostensibles, mediante ecuaciones.

- Por tanto, se ha de hacer un esfuerzo por explicitar las vinculaciones que la Matemática tiene con otras disciplinas. Si así se hace, es probable que los alumnos incrementen sus niveles de relación positivamente afectiva con la Matemática.

  — Según Mendoza et al., (2021) el docente “debe Atreverse a inventar, a innovar, a ensayar nuevos enfoques para la enseñanza de la Matemática, sobretodo si toma en cuenta los negativos resultados a los que nos ha conducido la enseñanza tradicional” (p.6). Como se ha expuesto reiteradamente, en la enseñanza tradicional las clases de Matemática, generalmente, siguen el siguiente axioma: iniciando con la exposición de "la teoría", luego muestra de ejemplos; realización de "ejercicios en la clase"; y, asignación de "deberes para el hogar justificadas como un reforzamiento"; todas estas acciones están a cargo del docente; al alumno le corresponde "hacer los ejercicios en clase" y "efectuar los deberes en el hogar”.

- Este modo como tradicionalmente se ha venido llevando la "clase de Matemática" ha traído como consecuencia unos resultados no deseados, tales como: bajo nivel de desempeño matemático de los alumnos, aburrimiento de éstos y, en los casos más graves, matefobia o temor hacia la Matemática. Estas anomalías podrían superarse si se introducen nuevos modos de propiciar el estudio y aprendizaje de la Matemática tales como: macroproyectos inter o extramatemáticos; resolución de problemas contextualizados; utilización de materiales matemáticamente potentes; aprendizaje basado en la investigación, modelización, la didáctica, entre otros.

Cambios curriculares necesarios en la enseñanza de la Matemática

Según Cerda, Pérez, Casas y Ortega, (2017) “es necesario realizar cambios profundos tanto en el contenido a ser enseñado como en las prácticas que los docentes de Matemáticas ponen en juego en las aulas de clase de esta asignatura” (p.9). De igual modo, para Delgado (2015), hasta la sociedad ha sido dicho que el modelo tradicional de enseñanza de la Matemática resulta inadecuado para garantizarles a los alumnos el logro de la educación matemática de calidad a la cual tiene derecho; por ello es impostergable la supresión de dicho modelo y el desarrollo de otro cualitativamente distinto; a continuación se exponen algunos de los necesarios cambios que han de darse en el currículo matemático académico, de modo que se incrementen las posibilidades para la emergencia de un modelo didáctico alternativo. Desenvolver el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática de manera tal, que los estudiantes tengan expectativas positivas de logro; es decir, que sientan confianza de que, si proceden de una manera idónea, pueden apropiarse adecuadamente de los objetos, procesos y, pero ello sustentar un mejor estudio en las matemáticas que constituyen una base única en la educación. Debe instalarse la idea de que la Matemática está al alcance de todo alumno que se esfuerce razonablemente, tenga confianza en sí mismo y participe de las actividades propiciatorias de aprendizaje matemático que se pongan en juego en el proceso didáctico (Arteaga y Macias, 2016).

Herrera, Montenegro y Poveda (2012), exponen que se debe ofrecer una visión amplia de la Matemática Escolar, mostrando el conjunto de ámbitos que la constituyen; y haciendo ver que la Matemática trasciende a la manipulación mecánica de símbolos. Esto significa que el trabajo escolar con la Matemática debe ir más allá de lo operatorio algorítmico e incluir situaciones que hagan posible que el estudiante se familiarice con la presencia de la Matemática en los más variados campos; para ello, es necesario diseñar proposiciones didácticas apoyadas en prácticas sociales que sean familiares a los alumnos, e incluyan situaciones problemáticas cuyo tratamiento matemático propicie el uso de procesos asociados con: realización de estimaciones; manejo del azar y las probabilidades; mediciones con unidades de distintas clases; recaudación, organización e interpretación de datos; elaboración de representaciones visuales de di-verso tipo, entre otros.

Mendoza y Mendoza, (2018) afirman que hacer uso intensivo y extensivo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, facilitan un lenguaje postmoderno, entre el estudiante y el docente de matemáticas. Esta comunicación tanto como sea posible, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Cada vez son más las investigaciones que muestran resultados positivos cuando se utilizan las Tecnologías de información y comunicación TIC'S en las prácticas didácticas propias de la Matemática; lejos han de quedar ya las aburridas "cuentas" demasiado largas y con poco impacto en el desarrollo del pensamiento matemático; los dispositivos electrónicos con los que ahora se cuenta, asumen la tarea calculística y dejan tiempo al alumno y también al docente para poner en juego procesos elevados de pensamiento matemático; se tiene alcance a innumerables proposiciones didácticas en las que estas nuevas tecnologías juegan un papel relevante en el aprendizaje de la Matemática, desde los niveles iníciales del sistema educativo. Así que el aula de Matemática debe abrir espacios al uso de las Calculadoras Gráficas, programas como el GeoGebra, las Computadoras y toda la variada gama de dispositivos electrónicos (softwares, teléfonos móviles, aplicaciones, video juegos, etc.) que hoy en día están prácticamente al alcance de todos.

Van Wyk y De Beer, (2019), recomiendan que el docente debe responsabilizar a los estudiantes por su propio aprendizaje. La investigación educativa, especialmente la promoción desde las Ciencias Cognitivas, ofrecer resultados robustos que permiten afirmar que el aprendizaje no se produce por la sola recepción de información sino, principalmente, a través del procesamiento activo de ésta; por ende, los profesores de Matemática deben emplear estrategias de aula que hagan que los estudiantes se conviertan en participantes activos de su propio aprendizaje en lugar de ser receptores pasivos de la información que les es transmitida por el docente; además, debe tenerse muy presente que la inmersión consciente en experiencias vivenciales de aprendizaje puede contribuir a modificar las creencias que personalmente se tienen tanto en relación con la disciplina Matemática, como en lo que tiene que ver con las actitudes hacia ella.

Según Revelo, Collazos y Jiménez, (2018) reconocer:

> “el valor formativo que tiene la mediación por pares académicos, es un indicio que suplementa el aprendizaje, se considera como proceso social y no individualmente solitario; además, la magnitud de los problemas que enfrentan los ciudadanos en su cotidianidad reclama el trabajo colectivo; por tal razón, es necesario que el aula de

> clases de Matemática sea un escenario para el aprendizaje de ciudadanía; una acción que coadyuva al logro de esta meta es la participación colectiva en procesos de aprendizaje; de manera tal que las clases de Matemática deben predominar, en la medida de lo posible, las experiencias de aprendizaje colaborativo" (p.16).

Por otra parte, la evaluación se debe asumir como una instancia para apreciar con justicia el desempeño de los estudiantes en lugar de ser un medio de coacción en manos de los docentes. Todo proceso didáctico requiere de evidencias para estimar su efectividad, es decir, su idoneidad para alcanzar sus propósitos en el tiempo y con los recursos que en el mismo hayan sido invertidos. En el caso de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática una de sus metas es que los alumnos logren niveles de desempeño adecuados para cuya estimación se recurre a procesos de evaluación; ésta tiene la finalidad de recaudar indicios sobre cuya base se puedan sostener los juicios acerca de la calidad de la formación matemática que hayan logrado en un momento dado quienes estudian esta disciplina.

Los procesos evaluativos no son neutros; lo que se evalúa, es decir, aquello que se estima digno de ser considerado, depende de la concepción que el evaluador (el docente que tiene facultad para evaluar) sostenga acerca del asunto a evaluar que, en este caso, es la Matemática (Ernest, 1991). Con esto se quiere resaltar la estrecha relación que existe entre evaluación y la concepción acerca de la Matemática; por ende, si se aspira superar el enfoque tradicional de la enseñanza de la Matemática, es menester asumir una visión amplia de lo que significa "saber Matemática" lo cual va más allá de las manipulaciones algorítmicas e implica:

- Valorizar la Matemática
- Razonar matemáticamente
- Comunicar los hechos matemáticos
- Resolver problemas
- Generar autoconfianza fortaleciendo el Auto concepto Matemático propio.

Fried, (2020), indaga que resaltar los vínculos empíricos de las matemáticas con otras ciencias son muy importante, por esta razón se debe mostrar los parentescos que la Matemática tiene con otras disciplinas y, también, los que existen entre las diferentes áreas que la constituyen. La Matemática, en tanto que creación cultural, no está desvinculada de otras producciones que son resultado del talento humano, especialmente las que se corresponden con el ámbito científico; por este motivo, durante sus experiencias con la Matemática, los estudiantes deben participar en situaciones que les permitan apreciar la aplicabilidad de la Matemática en el abordaje de problemas de otras disciplinas; además, se les deben propiciar oportunidades para que relacionen las diferentes áreas constitutivas de la Matemática, de modo que puedan constatar que la Matemática no está conformada por temas fragmentados, aislados o desconectados entre sí.

Las situaciones problémicas deben presentarse de forma filosófica, para los cuales exista más de una ida de solución y más de una respuesta correcta, estimulando así la creatividad de los estudiantes (Kagan, 1992). Esto significa que en los ejemplos y ejercicios que usan los profesores durante sus clases y en los que se inserten en los libros de texto y se usen en las pruebas para verificar el aprendizaje de la Matemática, se debe incluir, tanto como sea posible situaciones problemas o retos matemáticos que hagan viables varios abordajes en pro de su solución, el diseño de modos novedosos de resolución así como la posibilidad de ofrecer más de una solución; con este propósito se debe evitar el alto consumo de tiempo que implica la realización manual de cálculos tediosos, así que se recomienda la utilización de calculadoras (tanto las sencillas como las gráficas) para efectuarlos y así garantizar que los alumnos dispongan de más tiempo para la reflexión.

Ofrecer una visión unificada de la Matemática. Es necesario superar el enfoque de la enseñanza de la Matemática basado en objetivos específicos asociados con técnicas operatorias que se aplican en ejercicios particulares, ya que con esto se propicia la instalación de una visión fragmentada de la disciplina; un ejemplo lo ofrece la presentación de los números enteros Z, los vectores en el plano real y las matrices reales de orden N (número natural) junto con su correspondiente operación de adición (de enteros, vectores y matrices, respectivamente); desde el punto de vista algebraico son instancias de la misma estructura, pero habitualmente se presentan como objetos matemáticos totalmente diferentes que nada en común tienen (Widiati y Juandi, 2019).

Propiciar en los estudiantes el hábito de la escritura matemática. En las actividades dentro del aula de clases de Matemática como en las que se llevan a cabo fuera de ella, los alumnos han de contar con oportunidades variadas para comunicar por escrito hechos intramatemáticos o extramatemáticos, utilizando tanto su lengua materna como los diferentes modos escriturales de la Matemática; así que han de haber oportunidades para usar los lenguajes geométrico, algebraico, gráfico, tabular, matricial, diagramático, entre otros; con esto se contribuye a la comprensión por parte de los alumnos de que la Matemática también constituye un medio que puede ser utilizado para comunicarse de modo habitual.

Awawdeh (2018) expresa que dar la palabra a los estudiantes de matemáticas en el aula de clases, representa valor, aprecio y respeto. En la enseñanza tradicional de la Matemática, habitualmente, el monopolio de palabra lo tiene el docente; la mayor parte del tiempo de la clase es el docente quien está. hablado y los alumnos sólo toman "apuntes", replican lo que el profesor ha mostrado y, eventualmente, trabajan de manera individual para "practicar" la técnica operatoria que el docente ha “explicado”. Esta situación debe ser radicalmente modificada. Para ello es preciso colocar a los estudiantes en situaciones en las que ellos tengan una actuación más protagonista; y puedan así develar sus talentos matemáticos y encontrar estímulo a su desarrollo.

Finalmente se recomienda estimular la discusión, ya que la mayoría de los contenidos o temas que surgen en el salón de clases de Matemática proviene del docente y no de los estudiantes. En una típica clase de Matemática, los alumnos toman notas, practican lo que el profesor ha demostrado, y luego trabajan individualmente para perfeccionar la técnica. Nada de esto compromete la mente del alumno tan efectivamente como lo hace la argumentación y discusión entusiasta. Los argumentos en la búsqueda de pruebas convincentes son la esencia de los métodos matemáticos. Ello sólo puede aprenderse haciéndolo mediante la didáctica de los retos matemáticos, no escuchándolo.

Justificación

Es lógico pensar que todos los individuos no pueden ser matemáticos o científicos, pero lo que, si es cierto, es que para todo se debe poseer bases de conocimiento matemático para comprender mejor el universo actual. La matemática no es tan infructuosa como muchos la consideran. Las ciencias numéricas son amenas y recreativas. Los pasatiempos, retos o entretenimientos lógicos - matemáticos proporcionan un incentivo a la creatividad y la fantasía a través de la puesta en relieve de los anales que ligan entre sí a los elementos fundamentales del pasatiempo. Para Estapa y Amador, (2021) “El estudio del papel de los problemas en la lógica matemática y estructura del proceso orientativo constituye un aspecto de cardinal importancia en los fundamentos sobre el aprendizaje de la Matemática, donde no sólo se restringen al estudio de los procesos heurísticos que transcurren en la solución del problema propiamente” (p.15), al igual como en las concepciones de Polya (1965), “sino que ofrecen discusiones sobre sus aspectos epistemológicos y ontológicos como base para las sugerencias pedagógicas” (p.31).

Como uno de los principales desafíos para la futura investigación sobre la enseñanza universitaria de las matemáticas, radica en establecer la necesidad de mantener alguna interconexión entre el campo vivo de matemáticas y la educación matemática de pregrado, también conocida como matemática universitaria. Ella relaciona esto con el hecho de que en ninguna otra disciplina es la distancia entre lo enseñado y lo nuevo tan grande. Es una ilusión que los contenidos de las matemáticas universitarias las enseñanzas fluyen directamente de la fuente de la investigación, siendo continuamente actualizados con los avances de matemáticas, los retos matemáticos son de gran importancia, porque permiten generar estos avances de nuevos métodos y estrategias de forma empírica.

La mayoría de los estudios de investigación consideran que los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con una determinada matemática es pieza de conocimiento que tiene lugar dentro de una o unas pocas asignaturas, dominios o módulos del plan de estudios. Estos módulos parecen funcionar como un contexto del estudio que no se somete en sí mismo a la investigación, ni a nivel de los programas de estudio completos ni a nivel de los módulos y sus programas de estudio. En algunos estudios, se ha comprobado que las presentaciones comunes o básicas de las matemáticas ofrecen limitaciones o incluso obstáculos al aprendizaje de los estudiantes y innovación docente de la pieza de conocimiento considerada, pero la didáctica en sí misma con su estructura rara vez se pone en duda. La necesidad de implementar un modelo de orientación matemática desarrollada mediante los retos matemáticos va más allá de la investigación, donde las matemáticas universitarias hacen hincapié en la relación con los planes de estudio del reciente currículo ecuatoriano. Se debe mencionar también el impacto potencial, pero bastante limitado, a nivel de la innovación de los planes de estudio y las políticas educativas. Algunos de los problemas más globales identificados por la didáctica sobre la matemática piden claramente la investigación y el impacto a este nivel mediante los retos problémicos temporales (Winsløw, Gueudet, Hochmuth, y Nardi, 2018).

La creación de un enfoque basado en la presentación de retos matemáticos posee gran relación a la investigación donde facilita el desarrollo de programas de matemáticas para estudiantes universitarios, estos surgen como un Memoretoimportante. Bosch y Winsløw (2019) han comenzado a abordar esto, desde la perspectiva de la transposición didáctica universitaria, utilizando algunos problemas matemáticos esporádicos con investigaciones disponibles en la evolución de los programas universitarios de matemáticas.

En el presente manuscrito se problematiza la elaboración y la evolución de los retos geométricos de estudio no solo a nivel universitarios, sino a nivel general utilizando el marco de la transposición didáctica definido por Chevallard y Bosch, (2014) como:

> “el mecanismo mediante el cual el maestro o profesor toma el conocimiento y lo transfigura para presentárselo a sus estudiantes. El conocimiento humano se gesta en la comunidad científica, este es el saber o conocimiento o contenido que el profesor debe manejar perfectamente para poder enseñárselo a sus estudiantes” (p.14).

Chevallard y Bosch, (2014), utilizan este marco como una herramienta para presentar las matemáticas mediante la didáctica, de igual forma, en el presente libro a través de los retos matemáticos, donde se transforma la geometría y las distintas ramas abstractas de la matemática en un modelo educativo para investigar la organización y estructura precisa del conocimiento numérico a enseñar. El estudio o proceso de desarrollo lógico – matemático pueden se definidos en función de los objetivos de aprendizaje que debe alcanzar un determinado grupo de estudiantes o personas bajo ciertas condiciones.

En el caso de la enseñanza matemática a través de los retos o problemas planteados establecen sus objetivos en términos de competencias generales, materializadas en correspondencia a varios sectores o dominios de las matemáticas (Aritmética, Álgebra, Análisis, Lógica, Geometría) o a una selección específica de contenidos (Perspectivas en Matemáticas, Lenguaje y razonamiento matemático, modelado matemático). En un segundo nivel de concreción, los retos se describen a través de un planteamiento orientativo de estudios donde los objetivos de aprendizaje son más precisos y definidos en términos de contenidos temáticos y a menudo también de habilidades, donde el individuo tiene la libertad de optar a cualquier método para desarrollar el problema planteado con el fin de alcanzar los resultados de aprendizaje. Tomando la palabra "conocimiento" en un sentido amplio, para incluir el conocimiento formal pero también de prácticas informales, habilidades y competencias o actitudes.

Podemos decir que los problemas matemáticos son la forma en que las universidades definen el conocimiento que se debe enseñar. La noción de transposición didáctica y el Memoretomatemático pueden unirse para establecer que los procesos de enseñanza y aprendizaje no comienzan cuando los profesores y los estudiantes se reúnen en un salón de clases. El punto de partida es la selección y elaboración del conocimiento que se enseñará a partir de lo que se llama el conocimiento académico, que da la legitimidad de los conocimientos que se enseñan. Cabe destacar que en los retos matemáticos posee tres componentes que intervienen en este proceso: los eruditos institucionales de productores y usuarios de conocimientos (los "expertos" o estudiosos); la institución académica donde el conocimiento tiene que ser transpuesto (que en nuestro caso corresponde a la universidad); y la noosfera que se define en la vecindad de ambas e incluye a todos aquellos que toman decisiones sobre los procesos de enseñanza en juego. En el caso de los problemas o retos matemáticos, estos tres componentes tienen una gran intersección. Sin embargo, aunque compartan muchas de sus asignaturas, debemos diferenciar las posiciones que ocupan y los papeles que asumen sus asignaturas. Por lo tanto, un investigador de matemáticas puede actuar como un sujeto de la institución académica, como también un académico cuando produce matemáticas y actúa como un experto de la disciplina. También puede actuar como sujeto de la noosfera cuando toma decisiones sobre el diseño y ajuste de problemas a desarrollar para un determinado estudio.

Para los autores del presente libro, el proceso de seleccionar, adaptar, organizar y declarar el "conocimiento a enseñar" empezando por el conocimiento académico y terminando con todos los materiales de enseñanza que pueden ser propuesto en los retos matemáticos, se definen como transposición didáctica externa (TDE), mientras que el posterior, es decir el paso hacia el "conocimiento realmente enseñado" se llama transposición didáctica interna (TDI).

CAPITULO II

CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UNA PROPUESTA PEDAGOGICA.

De lo anotado en el capítulo anterior queda claro entonces lo útil que puede ser el desarrollar procesos de enseñanza de matemáticas basados en desafíos o retos matemáticos. Esta idea hizo que tiempo atrás nos propongamos construir unos retos que logren ese objetivo, para lo que consideramos que era menester no solamente publicar los retos y sus soluciones sino además construir una metodología de enseñanza que evidencie la utilidad de la propuesta.

En tal sentido, indagamos sobre algunas formas de retos matemáticos, nos propusimos que estos debían ser lo más dinámicos, llamativos y que no demanden conocimientos matemáticos profundos, por lo que desestimamos el formato de los "problemas matemáticos" fundamentalmente por cuanto queremos mostrar una cara amigable de las matemáticas, contrastando esa imagen negativa de esta ciencia, y en este caso, la misma palabra "problema" ya genera una contradicción.

Además nos propusimos que los mismos puedan ser replicados en cualquier circunstancia, es decir que los recursos con los que estos se construyan sean accesibles a cualquier profesor o estudiante de matemáticas.

También nos planteamos que el contenido a trabajarse sea general, es decir que no se limite a un área determinada de las matemáticas sino más bien se plantee como un soporte a cualquiera de las ramas de esta ciencia.

En base de conversaciones con compañeros docentes y de la importancia que se reconoce para el razonamiento matemático se resolvió que estos retos se planteen en torno al razonamiento numérico.

Acordando también que estos se plantearan en formatos llamativos, buscando un mecanismo de socialización masiva buscando una amplia participación y que respete las fases de enseñanza de las matemáticas esto es: fase concreta, fase gráfica, fase simbólica y abstracción[1].

Por ultimo nos planteamos que, los desafíos se sujetaran a principios éticos de solidaridad, igualdad y equilibrio, cumpliendo con lo propuesto en la reforma curricular de educación de Ecuador.

Razonamiento Numérico

El razonamiento numérico es una herramienta social que permite presentar y entender el rostro real de cualquier realidad a través de cantidades, porcentajes y gráficos, este se sujeta a lo que se conoce como "trasposición didáctica" que no es sino generar conocimiento a partir de presentar una realidad por resolver o una conjetura.

En tal sentido y estando de acuerdo con la siguiente definición de razonamiento matemático que presentamos a continuación:

> **"Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Forma parte de esta la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social...[2]"**

---

[1] https://aprendiendomatematicas.com/clase-3-las-3-fases-del-aprendizaje-de-las-matematicas/

[2] http://competenciasbasicascordoba.webnode.es/razonamiento-matematico/

Concepto que acepta lo amplitud de lo que es el razonamiento matemático y establece las áreas de acción. Rescata además el sentido de proceso que debe caracterizar el razonamiento matemático, superando la concepción de que este se articula a través de algoritmos u “operaciones”.

En tal sentido citaremos algunos indicadores o características de lo que concebiremos como razonamiento matemático.

Indicadores del Razonamiento Matemático:[3]

1. ***Ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad:***

   a) Conocer los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.)

   b) Comprender una argumentación matemática.

   c) Seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros).

2. **Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento. Producir e interpretar distintos tipos de información:**

   a) Expresar y comunicar información en lenguaje matemático.

   b) Expresar e interpretar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.

   c) Seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales.

   d) Estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.

   e) Identificar la veracidad de los razonamientos.

   f) Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

   g) Seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible.

3. **Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral:**

   a) Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana.

   b) Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información o a la solución de los problemas.

   c) Aplicar algoritmos de cálculo o elementos de la lógica.

   d) Aplicar los conocimientos matemáticos a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

   e) Aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente.

   f) Utilizar los elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan.

---

[3] http://competenciasbasicascordoba.webnode.es/razonamiento-matematico/

Sentido Social de las Matemáticas

"La conexión entre la educación matemática y la democracia no es obvia ni clara" (Skovasmose, 2012, p. 2) sin embargo esta relación es cada vez más fuerte, cada vez más es preciso entender a las matemáticas como una herramienta para entender de manera crítica y reflexiva lo que sucede en nuestro entorno natural o social.

El pensar en las matemáticas como un conjunto de algoritmos que permiten resolver problemas del entorno no tiene sentido en una era donde el recurso tiempo nos resulta escaso y debemos optimizarlo, donde los procesos tecnológicos se van incorporando en todo el quehacer humano con resultados sistematizados que generan dependencia.

Es preciso que el ser humano sea capaz de entender esos procesos y sus fundamentos, de tal forma que le sea posible mejorarlos y proponer otros nuevos en un ambiente de igualdad y respeto.

Consecuentemente no podemos generar una ciudadanía de igualdad si formamos ciudadanos que simplemente repiten lo que se les presenta, es preciso que sus percepciones de mejora y su singularidad construyan su conocimiento en un ambiente de absoluta libertad.

Por tanto el proceso de formación educativa y la forma de concebir y apropiarse los conocimientos debe desarrollar las competencias para que el ciudadano sea capaz de fundamentar sus puntos de vista, aceptar las opiniones de sus compañeros y construir propuestas colaborativamente.

La enseñanza de las matemáticas debe responder a lo indicado, manteniendo el fundamento de que las matemáticas nos ayudan a entender el entorno, por lo que es preciso que sus metodologías se sujeten a los principios sociales que nos rigen, sin limitarse por el carácter formal de las matemáticas como ciencia.

Particularmente el razonamiento numérico debe superar su condición algorítmica para desarrollarse como una herramienta que, desde la individualidad de cada ser humano, pueda interpretar y entender los hechos de la vida real.

Estimamos que, en este sentido, el razonamiento numérico debe ayudar la construcción de modelos matemáticos sujetos a la equidad, generando igualdad y armonía. Es decir descubriendo entre las relaciones de las cantidades esos espacios de justicia y equidad.

A la vez permitiendo identificar las realidades de injusticia, para fundamentadamente reclamar y proponer cambios.

En tal sentido nos hemos construido una metodología basada en el principio constructivista de aprender haciendo, que partiendo desde el interés que genera un Memoretoo desafío ir construyendo procesos que posibiliten una construcción de conocimiento o desarrollen diversas destrezas.

CAPITULO III

PROPUESTA PEDAGÓGICA DE LOS MEMORETOS

Definición

Para presentar esta propuesta pedagógica es necesario en primer lugar definir lo que es un memoreto.

> **MEMORETO**: ***Se dice que un memoreto es un desafío matemático que se construye con figuras geométricas básicas (rectángulos, cuadrados, triángulos, elipses y círculos) entrelazadas entre sí de forma que al ubicar los elementos de un conjunto determinado en los espacios indicados se cumpla alguna condición establecida en el desafío. La condición generalmente es matemática aun que puede ser de otra naturaleza***.

Propuesta pedagógica

Esta propuesta tiene los siguientes objetivos:

Objetivo General.

- *Construcción de conocimiento matemático en base de memoreto.*

Objetivos Específicos.

- Establecer procesos sistematizados de construcción de conocimiento matemático.
- Evidenciar la utilidad práctica de los procesos matemáticos.
- Socializar la propuesta matemática a fin de se constituya en un aporte al sistema educativo.

Explicación de la propuesta pedagógica.

De lo expuesto en el capítulo 1 de este libro, queda claro la utilidad que brindan los retos matemáticos para apoyar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, basándonos en esto proponemos aquí una propuesta pedagógica que lleva esto a la práctica.

A continuación expondremos memoretos de distintos tipos, en cada uno de ellos expondremos el proceso, debidamente sistematizado, a fin de que sea posible replicarlo en casos similares, indicando que los procesos en general siguen las siguientes etapas:

1. Comprensión del memoreto propuesto, donde debe quedar claro, las figuras sobre las cuales se ubicaran los en los elementos, el conjunto base con el que se trabajara y estará determinado por el conjunto de elementos que serán ubicados, la operación a realizar y la condición que debe cumplirse.
2. Determinación de la constante para el memoreto, procedimiento que tiene en cuenta los elementos de la etapa uno y que es construido lógicamente.
3. Procedimientos de llenado de ubicación de los elementos base, esto deberá hacerse ordenadamente por figuras.
4. Comprobación de resultados, que consiste en verificar que las condiciones del memoreto se cumplen en cada una de las figuras.

Para desarrollar estas etapas, debe tenerse en cuenta las siguientes condiciones:

- El conjunto base debe mantenerse constante en todo el proceso.
- La constante de memoreto sirve exclusivamente para ese memoreto propuesto.
- Los elementos seleccionados se hará únicamente en función de las condiciones del reto, pudiendo existir más de una alternativa.
- El orden de las figuras que se irán llenando es indistinto.
- La solución en ningún caso puede ser única.

Teniendo claro estas ideas, y recordando que es posible construir una solución a estos retos sin seguir estas indicaciones y que esas metodologías son igual de validad, a continuación presentamos unos ejemplos con sus respectivos procesos.

Ejemplo 1

Memoreto: Se han dibujado una elipse, un triángulo y dos rectángulos, tal como se observa en la imagen 1, generando veinte y tres puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte un número entero entre uno y veinte y tres de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea el mismo.

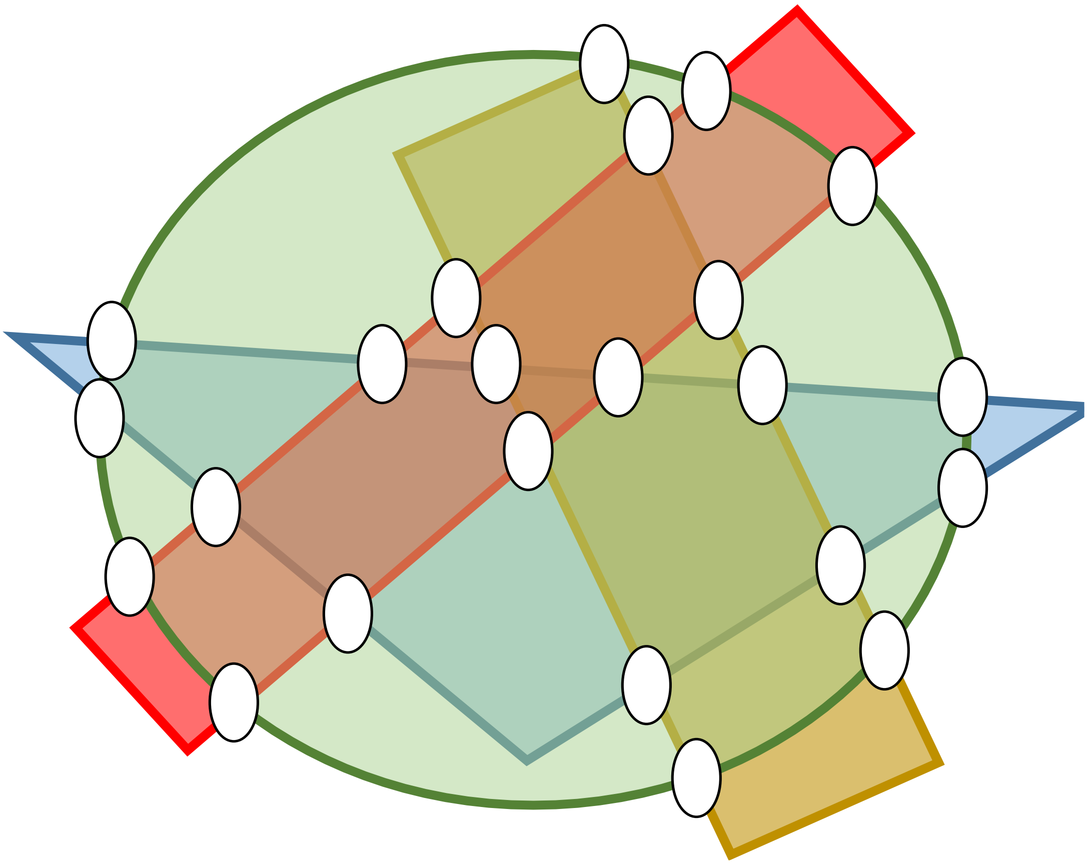


Imagen 1

Solución

El desafío es claro, se debe ubicar en cada punto de intersección un número entero entre uno y veinte y tres, sin que ninguno se repita y estos deben cumplir la condición de que si sumamos los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras geométricas, el resultado sea el mismo.

Determinación de la constante del memoreto

Teniendo en cuanta que el conjunto de números que deben ubicarse está definido por el siguiente conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23}, y además recordando la condición de que los ubicados en el contorno de cualquier figura es un mismo valor, está claro que lo primero será determinar el valor de la suma en cada contorno, pudiendo indicar que esa será la constante de las sumas en cada figura.

Ahora, si analizamos la figura, vemos que los veinte y tres puntos de intersección son todas intersecciones entre dos figuras, consecuentemente el número que ubiquemos en cualquiera de las intersecciones será considerado en la suma de los valores de los contornos en las dos figuras que se intersecan.

Es decir cada número estará presente en dos sumas, por lo tanto la suma total de los contornos de las cuatro figuras resultara de sumar dos veces todos los números del conjunto.

Esto es: $Suma\,Total = 2(1+2+3+4+\cdots+20+21+22+23)$

Ahora para ayudar este cálculo puedo recordar que la suma de los n primeros números enteros puede calcularse con la fórmula:

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que en este caso será: $S_{23} = \frac{23(24)}{2} = 276$

Y el doble de esta suma es 552.

Ahora, la suma de las cuatro figuras es 552 y como se plantea que la suma en cada una de ellas sea igual, la suma en cada una de ellas deberá ser 552 dividido para 4. Entonces la constante buscada, o el valor que deben sumar los números ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras será 138.

El hecho de que el valor obtenido para esa constante sea un número entero ayuda mucho, ya que a la vez que facilita ya la búsqueda de las combinaciones, indica que el desafío puede tener solución y podemos seguir. Si el valor de la constante no es un número entero, obviamente el memoreto no tiene solución.

Ubicación de Elementos

En este caso trabajaremos una metodología por figuras, es decir indagaremos primero cuantos elementos deben ubicarse en cada figura, en este caso vemos que en la elipse hay once puntos de corte, en el triángulo hay doce puntos de corte, en el un rectángulo hay doce puntos y en el otro hay once puntos de corte.

Aquí cabe un análisis si del conjunto de números establecido y teniendo en cuenta la cantidad de elementos en cada figuro debemos asegurarnos que si es posible con ese número de elementos del conjunto de valores establecidos, sumarlos y obtener el valor de la constante obtenida. En este caso con once o doce números del conjunto de enteros del uno al veinte y tres si es posible sumar ciento treinta y ocho, por lo que podemos proceder.

Está claro que si en este paso vemos que no es posible alcanzar el valor de la constante concluiremos que el desafío no tiene solución.

Podemos iniciar con cualquiera de las cuatro figuras, aquí iniciaremos por el rectángulo que tiene doce puntos de intersección, por lo tanto buscaremos una combinación de doce elementos de los del conjunto dado, que sumen ciento treinta y ocho.

Comencemos con lo más simple, tomemos los doce primeros, es decir el conjunto:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, la suma de estos elementos es 78.

Podemos ir aumentando, quitando el menor y agregando el siguiente, así en cada cambio la suma aumentará en doce, en este caso, si quitamos los cinco primeros y los cambiamos por los cinco siguientes habremos aumentado sesenta y el resultado será ciento treinta y ocho, con lo que ya tendríamos los número de la primera figura.

Entonces el subconjunto seleccionado será:

$\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

Debe indicarse que en otros casos, este procedimiento no será exacto, pero siempre nos aproximara lo suficiente hacia la constante, allí deberemos cambiar uno con el siguiente elemento del conjunto, justamente para que ese cambio permita que la suma alcance el valor deseado.

Además debe indicarse que la combinación de elementos seleccionados o el subconjunto seleccionado en ningún caso es único, lo que debe estar claro es que cumpla la condición establecida, es decir que los doce elementos seleccionados sumen ciento treinta y ocho.

La ubicación de los valores será indistinto, pudiendo posteriormente, si se requiere, reubicarlos dentro de esta figura (Imagen 2). Debe quedar claro que estos elementos seleccionados se mantendrán siempre en esta figura.

Ubicando estos valores tendremos:

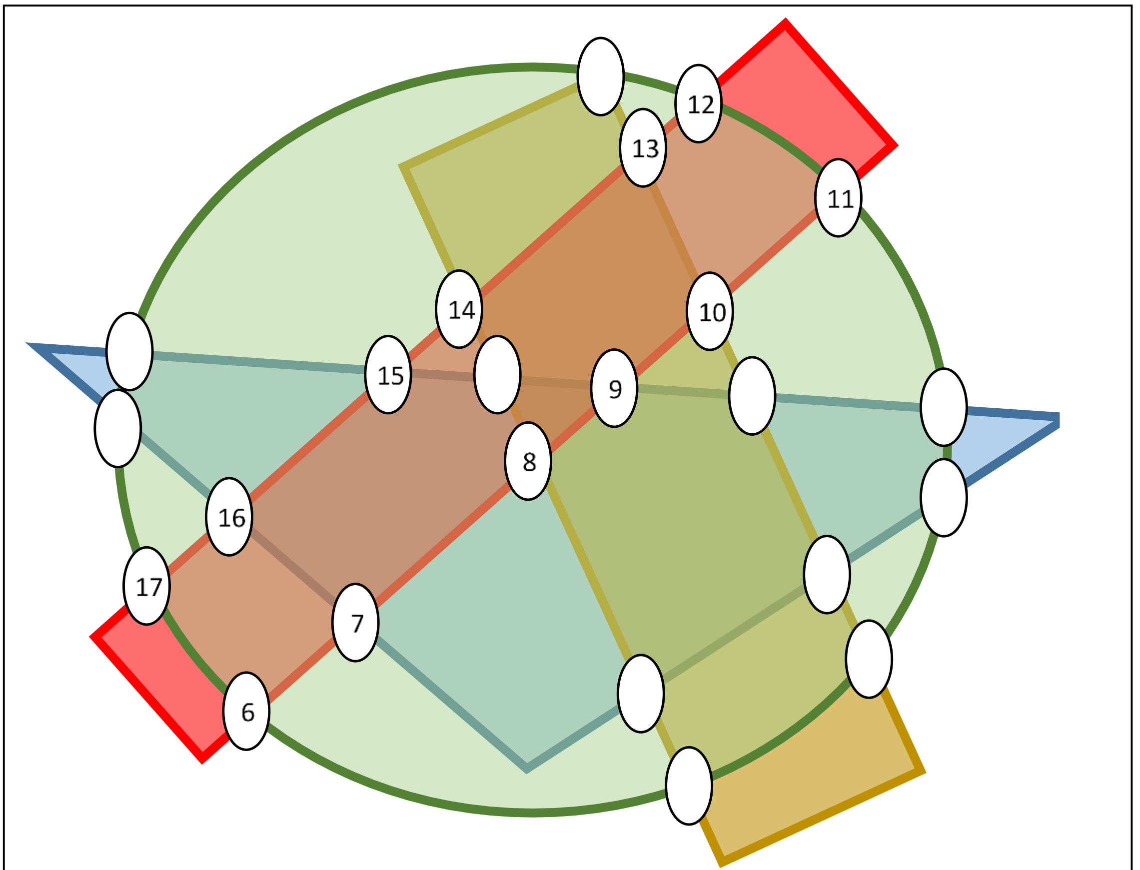


Imagen 2

Entonces, ya hemos ubicado doce elementos y en una de las figuras, el resultado de sumar los elementos de su entorno es ciento treinta y ocho.

Ahora seleccionemos otra figura, tomemos aquella que también tiene doce puntos de corte, es decir el triángulo.

De los elementos ubicados en la primera figura, uno de los rectángulos, cuatro están en el triángulo, corresponden al subconjunto {15, 9, 16, 7} y estos suman cuarenta y siete. Por tanto de los elementos que quedan, que corresponden al subconjunto:

{1, 2, 3, 4, 5, 18, 19, 20, 21, 22, 23}

Debemos seleccionar ocho, cuya suma sea noventa y uno, que es la diferencia entre la constante y los cuarenta y siete que suman los elementos ya ubicados.

Con un proceso similar al anterior vemos que el subconjunto que cumple (que no es el único) es:

{1, 3, 4, 5, 18, 19, 20, 21 }

Si no es posible encontrar este subconjunto, se puede regresar al paso anterior y buscar otra combinación de elementos para la primera figura, debiendo agotar todas las posibilidades.

Aquí también la ubicación de los elementos es indistinta, estableciéndose también que los elementos seleccionados se mantendrán siempre dentro de la figura, en este caso del triángulo, pudiendo reubicarlas luego, si se requiere, siempre dentro de la figura.

Ubicamos estos elementos en la figura (Imagen 3):

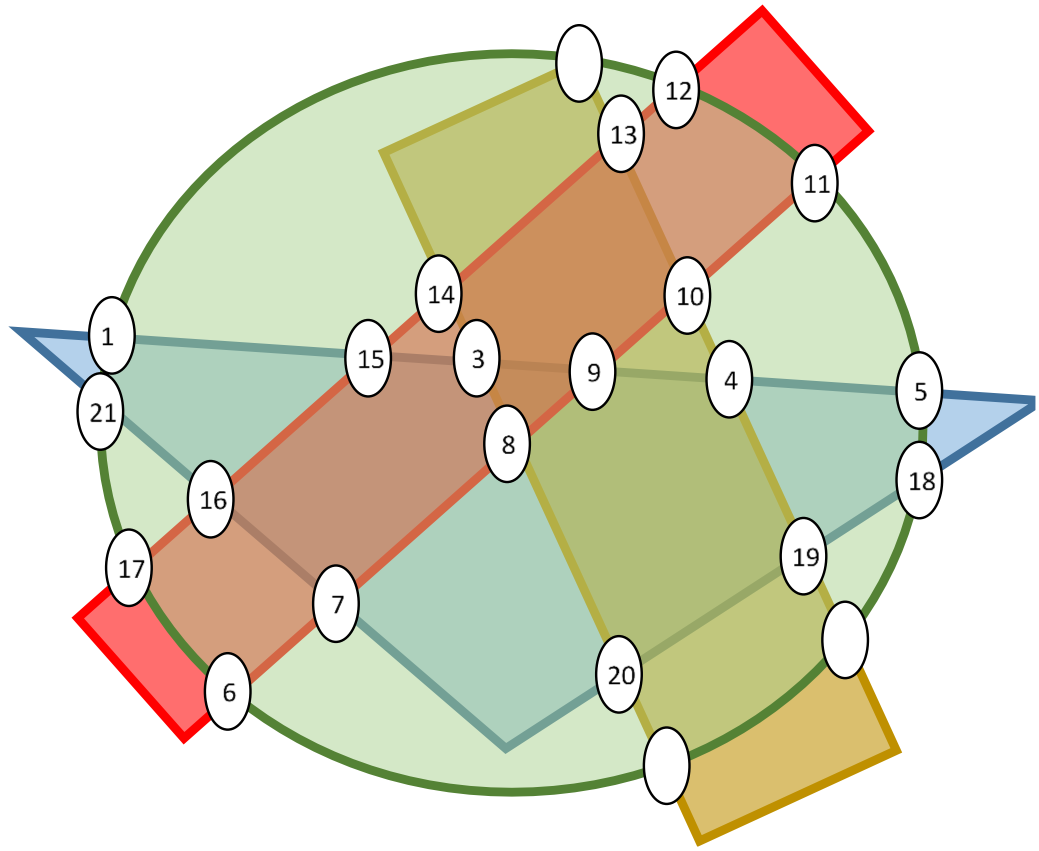


Imagen 3.

Hasta aquí, se han ubicado veinte elementos y las dos figuras cumplen ya la condición planteada.

Faltan por ubicarse los elementos {2, 22, 23} que suman cuarenta y siete, y con estos deben completarse las dos figuras que faltan por lo tanto en estas, los elementos existentes deben sumar noventa y uno.

Si analizamos en la elipse, de los once elementos que están en su contorno de la elipse se han ubicado ocho y estos suman noventa y uno, por lo tanto debemos directamente ubicar los tres elementos que faltan en las ubicaciones.

En la mayoría de los casos no se da esta coincidencia, en ese caso habrá que hacer los cambios necesarios tomando en cuenta que no afecte el total de las figuras ya completadas.

Ubicamos entonces los tres elementos que faltan en la elipse (Imagen 4), tendremos:

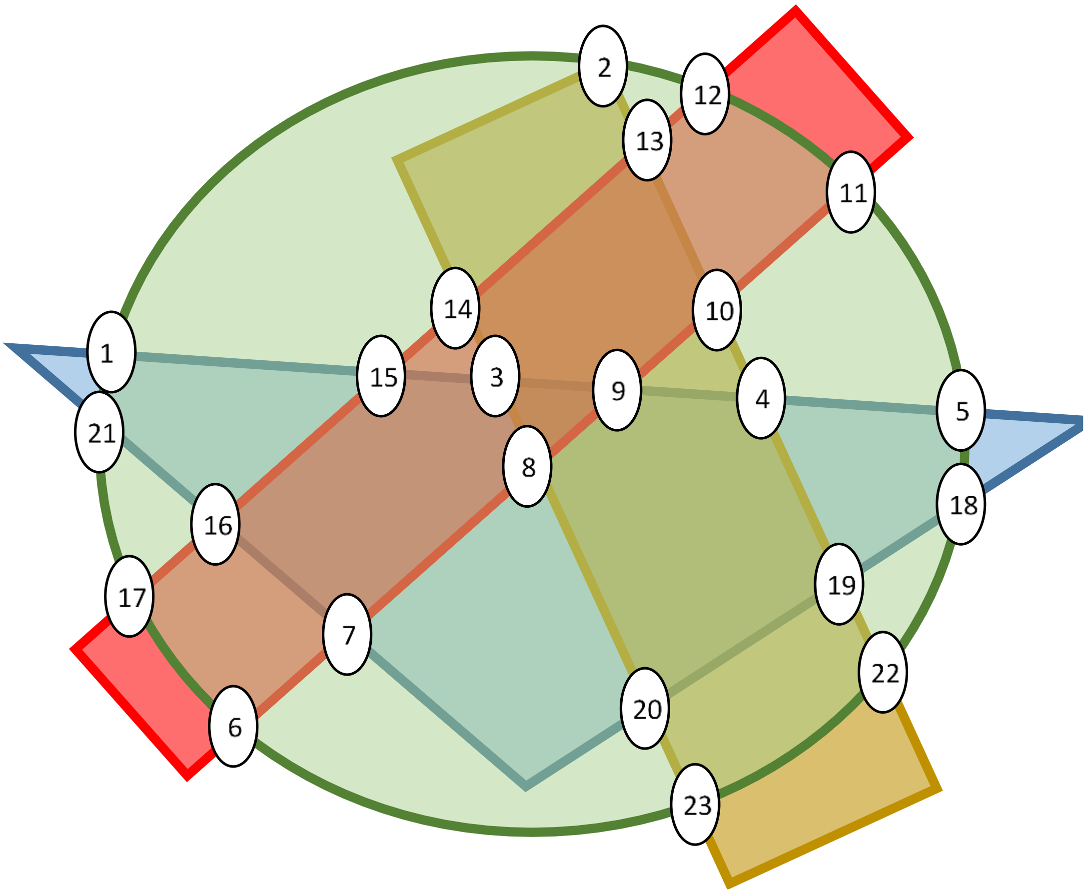


Imagen 4.

Es claro que estos elementos también se ubicaran indistintamente sobre los espacios en blanco, y por supuesto, estos formaran parte de los elementos de las dos figuras.

Con esto hemos llenado las tres figuras, consecuentemente se llenará también la cuarta y la suma de los elementos en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras es ciento treinta y ocho. El memoreto se ha cumplido.

Por la forma como hemos ido construyendo la solución está claro que la solución no es única, posteriormente mostraremos que existen muchas solución aunque la probabilidad de encontrar una solución de estas es mínima.

Ejemplo 2

Memoreto: Se han dibujado una elipse, un triángulo y dos rectángulos, tal como se observa en la imagen 5, generando veinte puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte un número entero entre uno y veinte de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea el mismo.

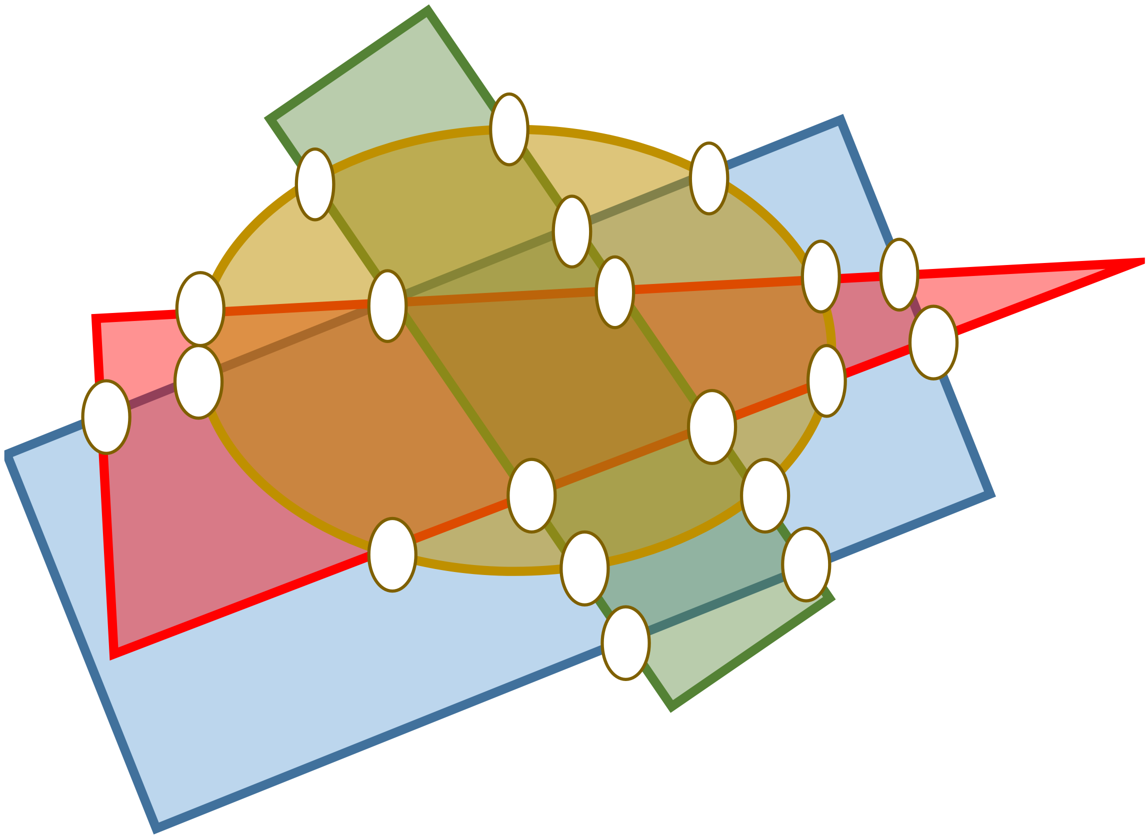


Imagen 5.

Solución

En este caso se debe ubicar en cada punto de intersección un número entero entre uno y veinte, sin que ninguno se repita y estos deben cumplir la condición de que si sumamos los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras geométricas, el resultado sea el mismo.

Determinación de la constante del memoreto:

Teniendo en cuanta que el conjunto de números que deben ubicarse está definido por el siguiente conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}, y además recordando la condición de que los ubicados en el contorno de cualquier figura es un mismo valor, está claro que lo primero será determinar el valor de la suma en cada contorno, pudiendo indicar que esa será la constante de las sumas en cada figura.

Ahora, si analizamos la figura, vemos que los veinte puntos de intersección, diecinueve de ellos son intersecciones entre dos figuras y una es una intersección entre tres figuras, consecuentemente el número que ubiquemos en las diecinueve intersecciones será considerado en la suma de los valores de los contornos en las dos figuras que se intersecan y el que se ubique en el punto de la triple intersección será considerado en la suma de las figuras que se intersecan ahí. Es decir todos los números estarán en dos figuras teniendo en cuenta que uno de ellos, además está en la tercera figura.

Además debe estar claro también que el total de la suma de los elementos de las cuatro figuras debe ser un entero múltiplo de cuatro en vista de que en cada figura el resultado será un entero y ese valor es la constante, es decir la suma total de las cuatro figuras es cuatro veces esa constante. Entonces la suma total será dos veces la suma de los números del uno al veinte más el valor del número ubicado en la triple intersección.

Si sumamos los números del uno al veinte, el resultado es doscientos diez, entonces el doble de esto es cuatrocientos veinte, que si es un número múltiplo de cuatro, por tanto el número que va en la triple intersección deberá ser también un número múltiplo de cuatro, pudiendo ser 4, 8, 12, 16 o 20. No es posible ubicar en la triple intersección un número distinto a estos ya que su suma no será múltiple de cuatro.

Si escogemos el cuatro la suma total será: 210 + 210 + 4 = 424.

Y la constante para este Memoretoes: 424/ 4 = 106.

Seleccionando así tenemos ya la constante del Memoretoy además se ha ubicado un elemento (Imagen 6).

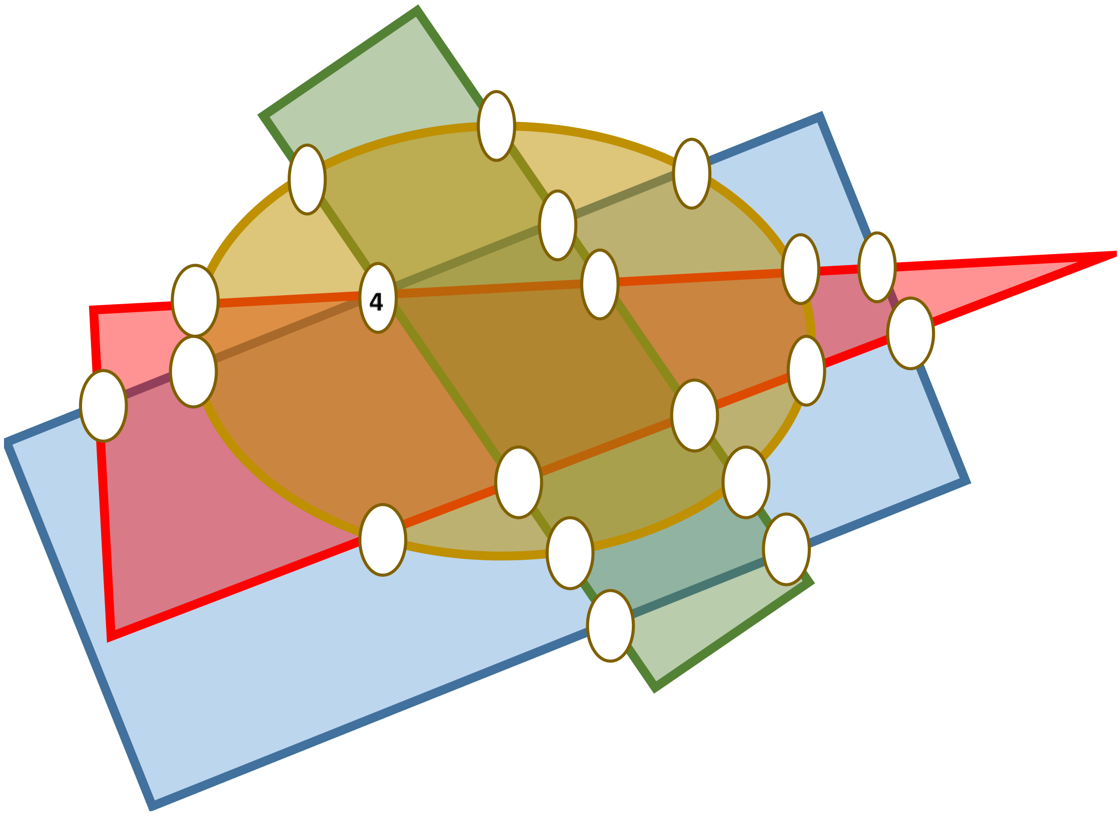


Imagen 6.

Ubicación de Elementos:

En este caso trabajaremos una metodología por figuras, es decir indagaremos primero cuantos elementos deben ubicarse en cada figura, en este caso vemos que en la elipse hay diez puntos de corte, en el triángulo hay once puntos de corte, en el un rectángulo hay once puntos y en el otro hay nueve puntos de corte.

Aquí cabe un análisis si del conjunto de números establecido y teniendo en cuenta la cantidad de elementos en cada figura debemos asegurarnos que si es posible con ese número de elementos del conjunto de valores establecidos, sumarlos y obtener el valor de la constante obtenida. En este caso con nueve, diez u once números del conjunto de enteros del uno al veinte y tres si es posible sumar ciento seis, por lo que podemos proceder.

Ahora procedamos a ubicar elementos, para ello iniciaremos con el rectángulo donde se requieren once elementos, incluyendo e cuatro, que sumen ciento seis.

Dicho de otra forma del conjunto:

{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} debemos seleccionar un subconjunto de diez elementos que sumen ciento dos.

Iniciamos con: {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} que suma sesenta y dos, cambiando los tres menores por los que es siguen en orden tendremos el subconjunto { 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} cuyos elementos suman noventa y cinco, es decir aún debe aumentarse en siete, por lo que cambiaremos el quince por el ocho y tendremos el subconjunto { 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, subconjunto de diez elementos que suman ciento dos.

Aclarando que estos diez elementos y el cuatro que ya está ubicado serán los elementos que correspondan a uno de los rectángulos, también que esta selección podrá cambiarse si en lo posterior se verifica que el Memoretono es posible solucionar con esta alternativa.

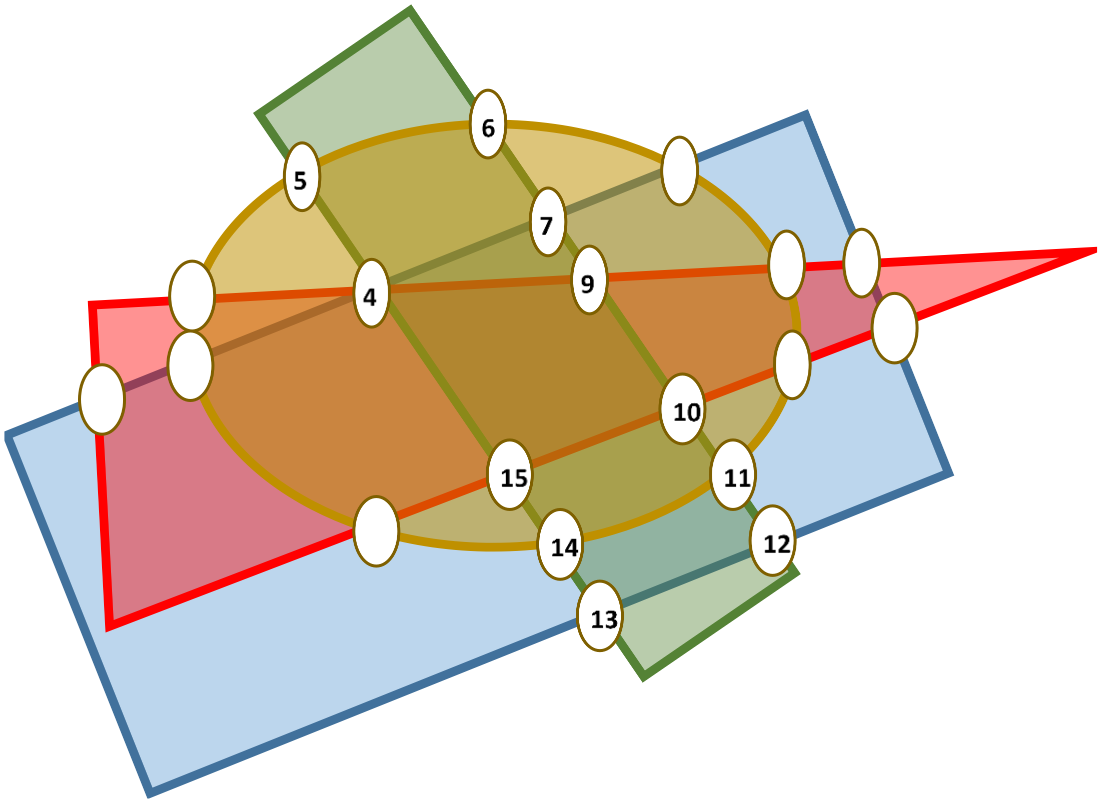


Imagen 7.

Como ya se dijo, este es uno de los posibles subconjuntos que cumplen la condición, seleccionando estos procedemos a ubicar los elementos indistintamente en la figura (Imagen 7).

Entonces, ya hemos ubicado doce elementos y en una de las figuras, el resultado de sumar los elementos de su entorno es ciento seis.

Ahora seleccionemos otra figura, tomemos aquella que también tiene once puntos de corte, es decir el triángulo.

De los elementos ubicados en la primera figura, uno de los rectángulos, cuatro están en el triángulo, corresponden al subconjunto {4, 9, 10, 15} y estos suman treinta y ocho. Por tanto de los elementos que quedan, que corresponden al subconjunto:

{1, 2, 3, 8, 16, 17, 18, 19, 20}

Deberemos escoger un subconjunto de siete elementos cuya suma sea sesenta y ocho.

Iniciemos con el subconjunto {1, 2, 3, 8, 16, 17, 18}, siete elementos que suman sesenta y cinco, la sume debe aumentarse en tres, por lo que cambiaremos el dieciséis por el diecinueve para cumplir la condición establecida.

Un subconjunto que cumple las condiciones será: {1, 2, 3, 8, 17, 18, 19}

Reiterando que no es la única alternativa, ubicaremos indistintamente estos elementos en el triángulo (Imagen 8), aclarando que estos más los cuatro que ya están ubicados serán los que pertenezcan al triangulo y que esta alternativa podrá cambiarse posteriormente si se verifica que con esta alternativa el memoretono tiene solución.

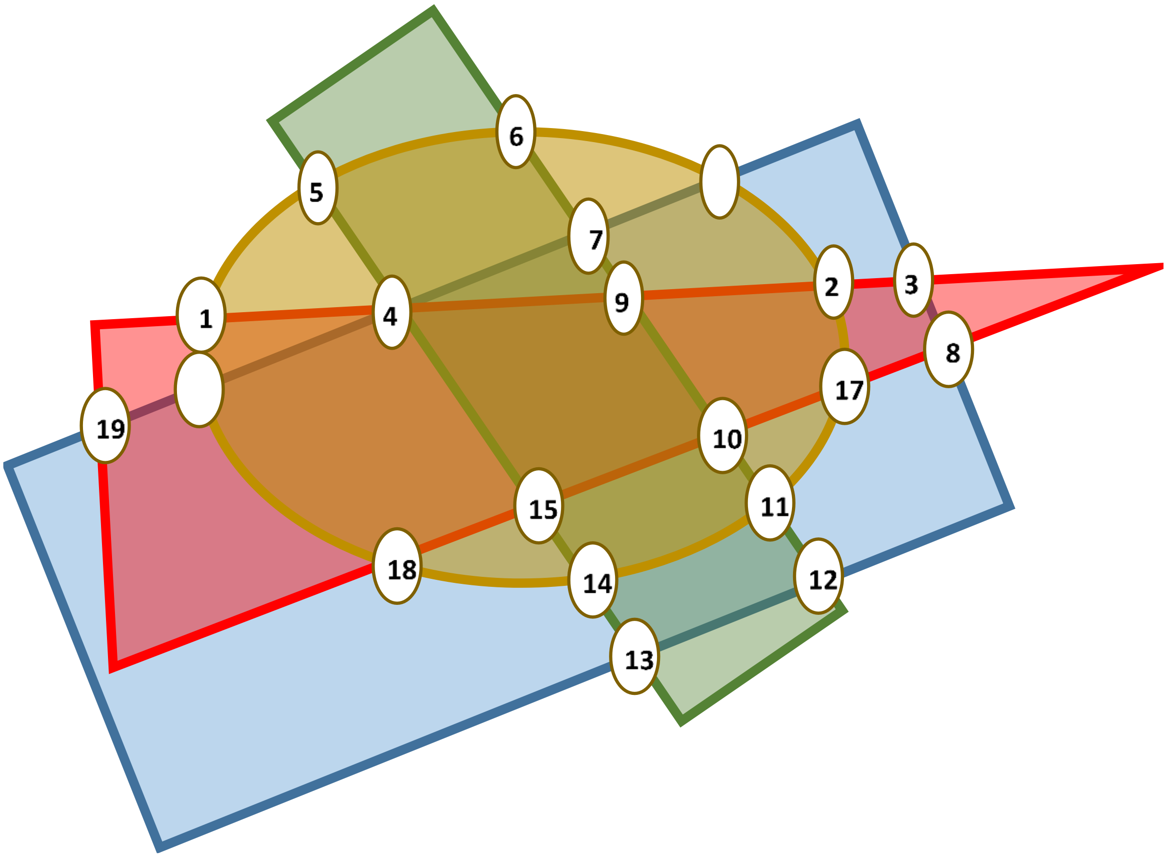


Imagen 8.

Debe recordarse que el único elemento que no podemos cambiar es el ubicado en la triple intersección.

Con esto tenemos ya completos dos figuras, en cada uno de ellas se han ubicado los elementos respectivos cumpliendo que su sumatoria sea ciento seis.

Faltan por ubicarse los elementos del subconjunto {16,20} que suma treinta y seis, y que deben ubicarse en los dos espacios vacíos, estos son los que corresponden a los contornos de la elipse y del rectángulo de nueve elementos. Analizamos entonces cuanto suman los elementos ya ubicados en el contorno de la elipse, vemos que estos suman setenta y cuatro, si agregamos los dos que suman treinta y seis el resultado es ciento diez, cuatro más que lo requerido. Por tanto deberemos cambiar elementos entre los que se ubican en la elipse y el rectángulo incompleto, manteniéndose en las figuras ya completadas.

Lo que necesitamos lo logramos si cambiamos el siete con el once, ambos elementos se mantienen en la figura a la que pertenecen, el rectángulo de once elementos, y al cambiar el once que está en la elipse, por el siete que está en el otro rectángulo disminuimos en cuatro el total de la elipse en cuatro, esto es sus elementos sumarian setenta (Imagen 9).

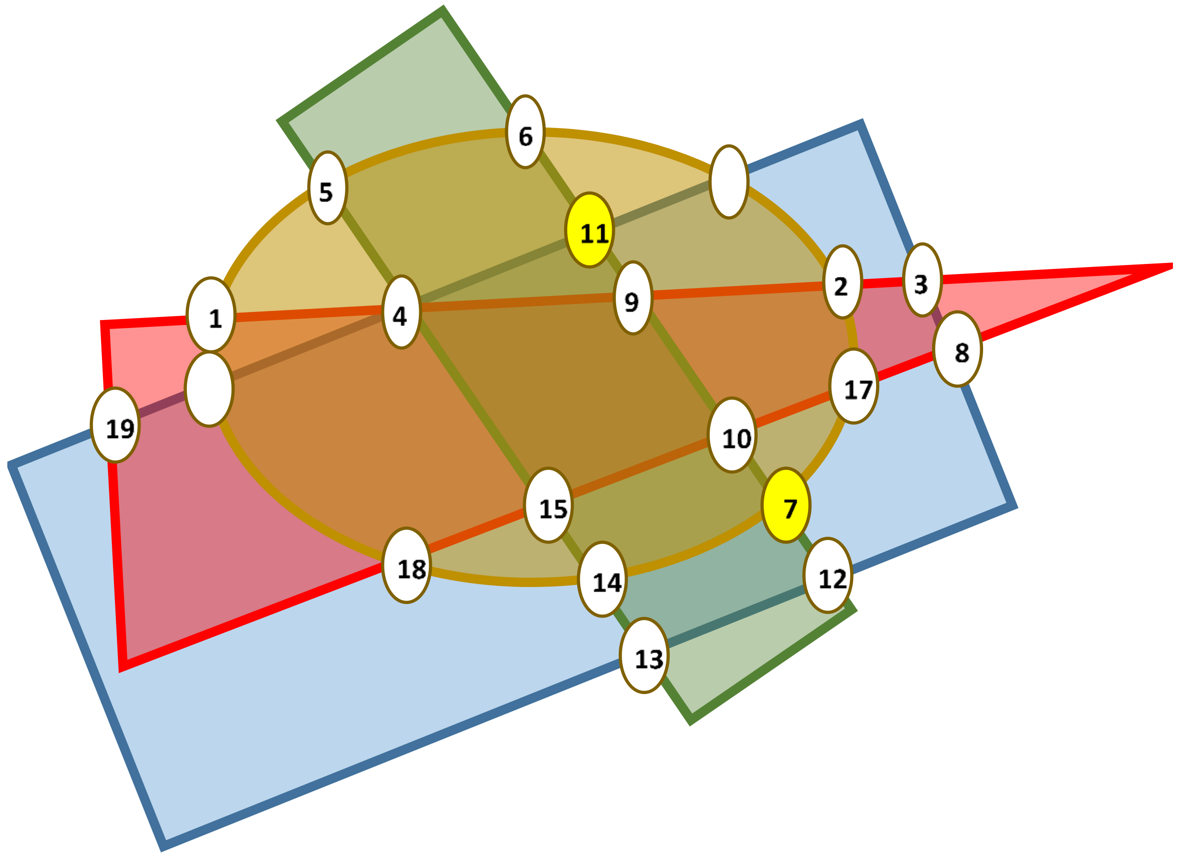


Imagen 9.

Por lógica en el otro rectángulo, en aquel donde se ubican nueve elementos la suma también será setenta, es decir si ubicamos los dos elementos en los espacios vacíos la suma de los elementos en los entornos de las cuatro figuras será ciento seis y se cumplirá el memoreto planteado.

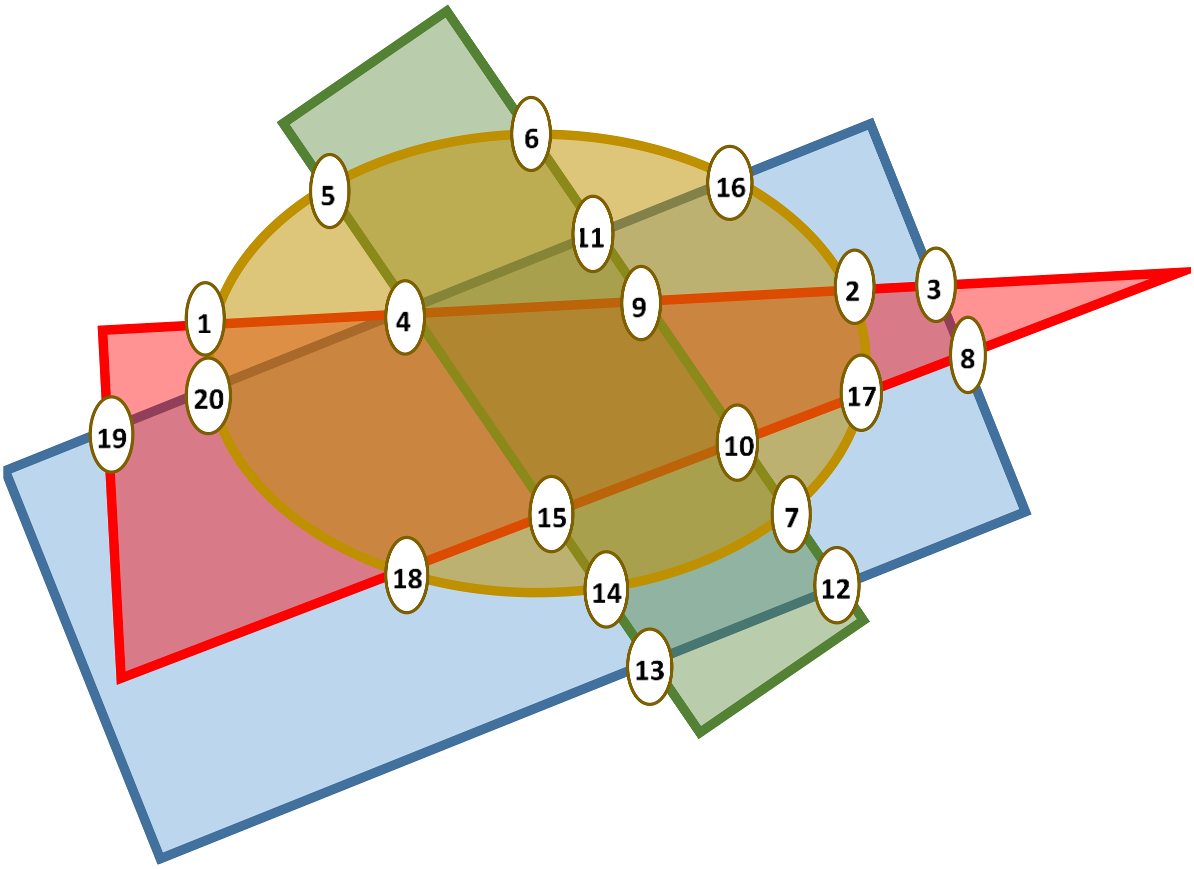


Imagen 10.

Reiterando que no es la única solución posible, la construida y que se observa aquí (Imagen 10) cumple con el memoreto planteado.

Ejemplo 3

En siguiente ejemplo que presentaremos es distinto a los otros dos, aquí se desarrolla en base de regiones.

Memoreto: Se han dibujado tres rectángulos y una elipse, tal como se observa en la imagen 11. Generando quince regiones distintas, se pide ubicar en cada región un número entero distinto entre uno y quince, de tal manera que al sumar los números ubicados en las regiones que están dentro de cada figura, el resultado sea el mismo.

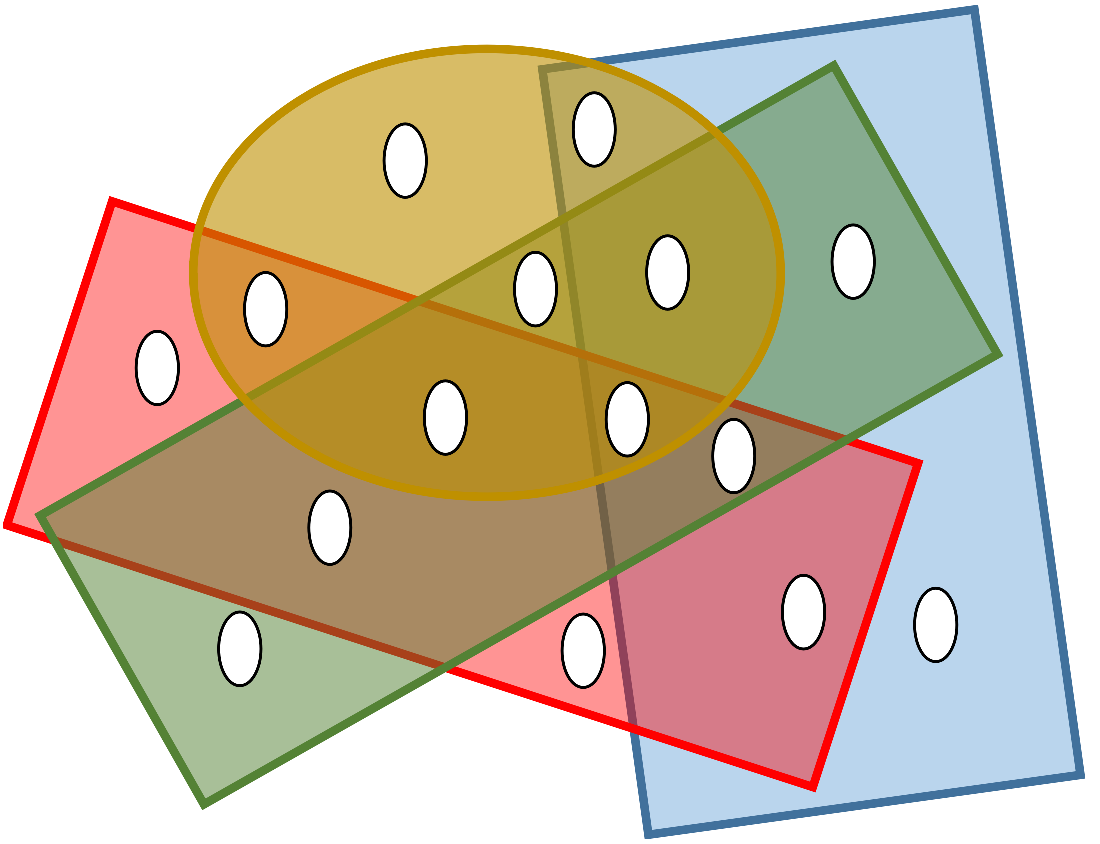


Imagen 11.

En este caso, se habla de regiones y no de intersecciones, teniendo claro que cada región puede resultar de la intersección entre las figura, pudiendo ser entre dos figuras, entre tres figuras e incluso entre las cuatro regiones, aclarándose además que también existirán regiones que correspondan exclusivamente a una figura.

Es claro que dentro de cada una de las cuatro figuras propuestas existen varias regiones, y que en cada una de estas se deberá ubicar un número entero de acuerdo a las condiciones establecidas.

Determinación de la constante del memoreto:

El conjunto de los números que deberemos ubicar en las figuras es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} teniendo en cuenta que algunos de ellos forman parte de una sola figura, es decir estarán presentes únicamente en las sumas de esas figuras, otros estarán en las regiones que resultan de la intersección de dos figuras, por tanto estarán presentes en la suma de esas dos figuras, los que se ubicaran en la intersección de tres figuras estarán presentes en la sumatoria de las tres figuras y los que se ubiquen en la intersección de las cuatro figuras estará presente en la sumatoria de todas las figuras presentes.

Teniendo en cuenta lo expuesto, es necesario entonces, determinar para cada región el número de figuras a las que pertenecen, esto puede verse en la imagen 12, donde en cada región se ha ubicado el número de figuras a las que esa región pertenezca.

Donde se puede observar que existen cinco regiones que pertenecen a una sola figura, seis regiones resultan de la intersección de dos figuras, tres regiones pertenecen a tres figuras y una región es parte de las cuatro figuras.

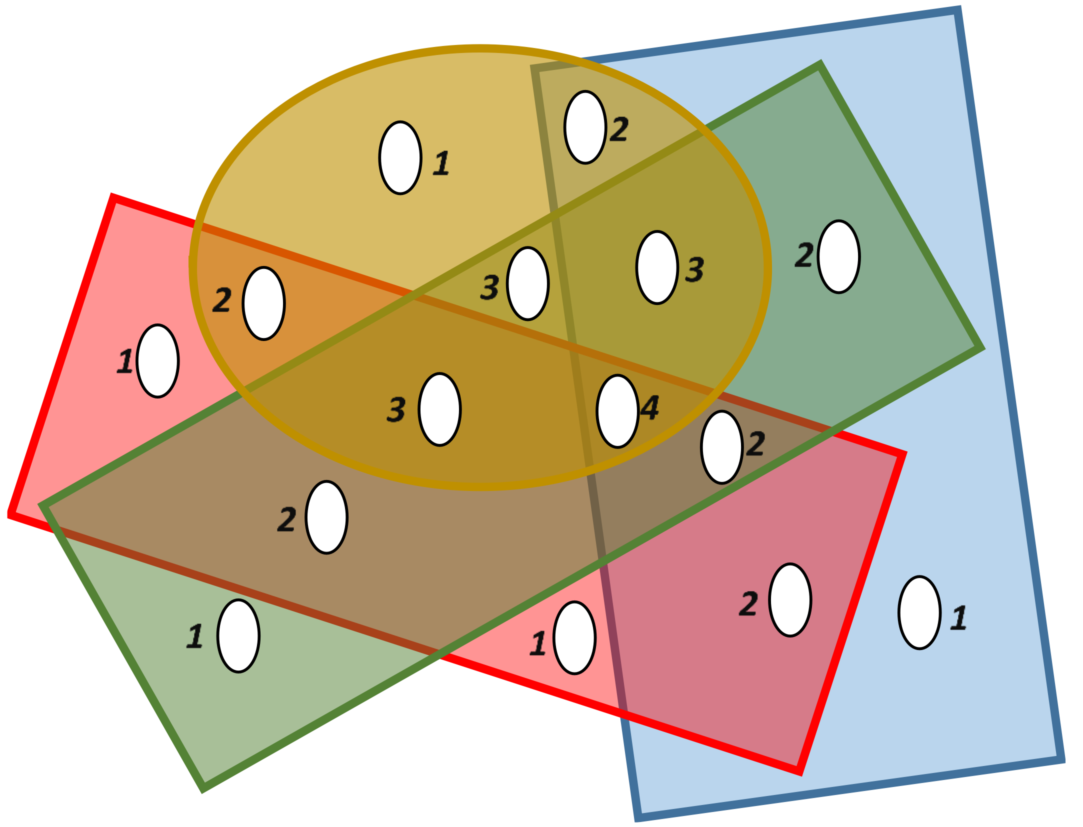


Imagen 12.

Teniendo esto en cuenta y el hecho de que la suma de los valores ubicados en las regiones que forman parte de cada figura deben sumar un número entero, al que consideraremos la constante de este reto, por tanto la suma total de las cuatro figuras será cuatro veces el valor de esa constante. Consecuentemente la suma total de las cuatro figuras será un numero entero múltiplo de cuatro.

Así, busquemos la forma de partir el conjunto de elementos que se ha planteado esto es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, en cuatro subconjuntos disjuntos: los cinco que se ubicaran en regiones que forman parte de una sola figura, los seis que se ubican en las regiones que pertenecen a dos figuras, las tres que se ubicaran en regiones que pertenecen a tres figuras y uno que se ubique en la región que pertenece a las cuatro figuras.

Podríamos comenzar planteando la partición siguiente:

- {1, 2, 3, 4, 5, 6}, para las regiones de dos figuras, sus elementos suman veinte y uno.
- {7, 8, 9}, para las regiones que pertenecen a tres figuras, sus elementos sumas veinte y cuatro.
- {10}, para la región que pertenece a las cuatro figuras.
- {11, 12, 13, 14, 15}, para las regiones que se ubicaran únicamente en una figura, sus elementos suman sesenta y cinco.

Por lo tanto la suma total de las cuatro figuras será: 65 + 2(21) + 3(24) + 4(10) = 219.

Este resultado no es múltiplo de 4, por lo tanto no es posible resolver el memoreto con esta partición, se deberá buscar otra.

En este caso encontramos la siguiente partición:

- {1, 2, 3, 5, 6, 7}, para las regiones de dos figuras, sus elementos suman veinte y cuatro.
- {9, 10, 11}, para las regiones que pertenecen a tres figuras, sus elementos sumas treinta.
- {8 }, para la región que pertenece a las cuatro figuras.
- {4, 12, 13, 14, 15}, para las regiones que se ubicaran únicamente en una figura, sus elementos suman cincuenta y ocho.

Con esto la suma total de las cuatro figuras será: 58 + 2(24) + 3(30) +4(8) = 228.

Doscientos veinte y ocho si es múltiplo de cuatro. Es preciso aclarar que esta es una de las particiones que permiten obtener la constante buscada, en ningún caso es única.

Así, la constante que buscamos será doscientos veinte y ocho dividido para cuatro, que es cincuenta y siete.

Hasta aquí se ha calculado el valor de la constante, pero además se sabe ya en qué tipo de región se ubicara cada número. Explicando que el tipo de región se establece por la cantidad de figuras de la que forma parte esa región.

En la imagen 13, se ha ubicado el elemento que corresponde a la región que forma parte de las cuatro figuras, además se ha ubicado una designación para cada una de las figuras, así al círculo se le ha designado con C, con R1, R2 y R3 se designara a cada uno de los rectángulos.

Ubicación de elementos:

Seleccionamos la figura R3 para iniciar la ubicación de los elementos, vemos que aparte de la ya ubicada en ese rectángulo existen tres regiones donde se intersecan dos figuras, tipo 2, dentro de estas también están las tres regiones que pertenecen a las tres figuras, tipo 3, y una región que pertenece a una sola figura, tipo 1 y la suma de los elementos ubicados en estas siete regiones debe ser cuarenta y nueve.

Escogemos el subconjunto { 13, 1, 2, 3, 9, 10, 11} que cumple las condiciones indicadas.

Teniendo en cuenta la relación entre elementos y tipo de región, ubicamos estos elementos en la figura (Imagen 13).

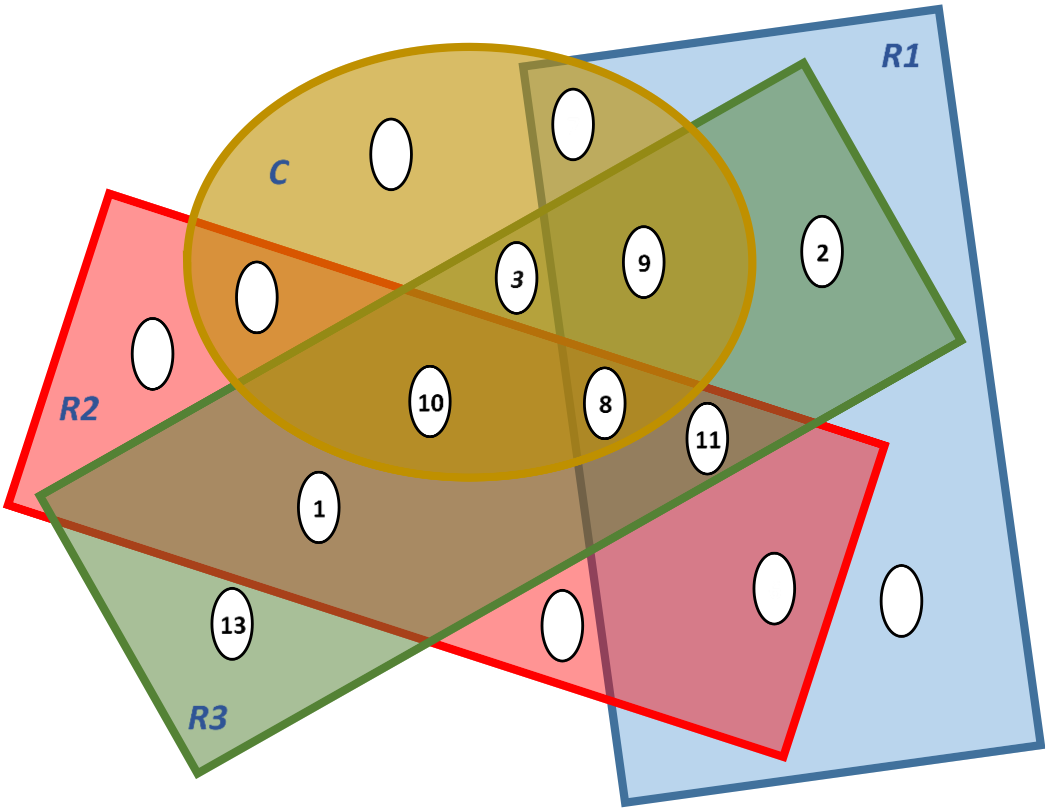


Imagen 13

Con esto hemos completado el rectángulo R3, continuaremos con el rectángulo R1, en este ya se han ubicado los elementos {9, 8, 2, 11} que suman treinta, deben buscarse entonces dos de tipo 2 y uno tipo 1, de los que aún no han sido ubicados, teniendo en cuenta que los tres elementos deben suma veinte y siete,

Eliminando los ya ubicados, los elementos disponibles son: Tipo 1, {4, 12, 14, 15} y tipo 2, {6, 7, 9}, de estos los seleccionados serán {6, 7, 14}.

En la imagen 14, ubicamos estos elementos:

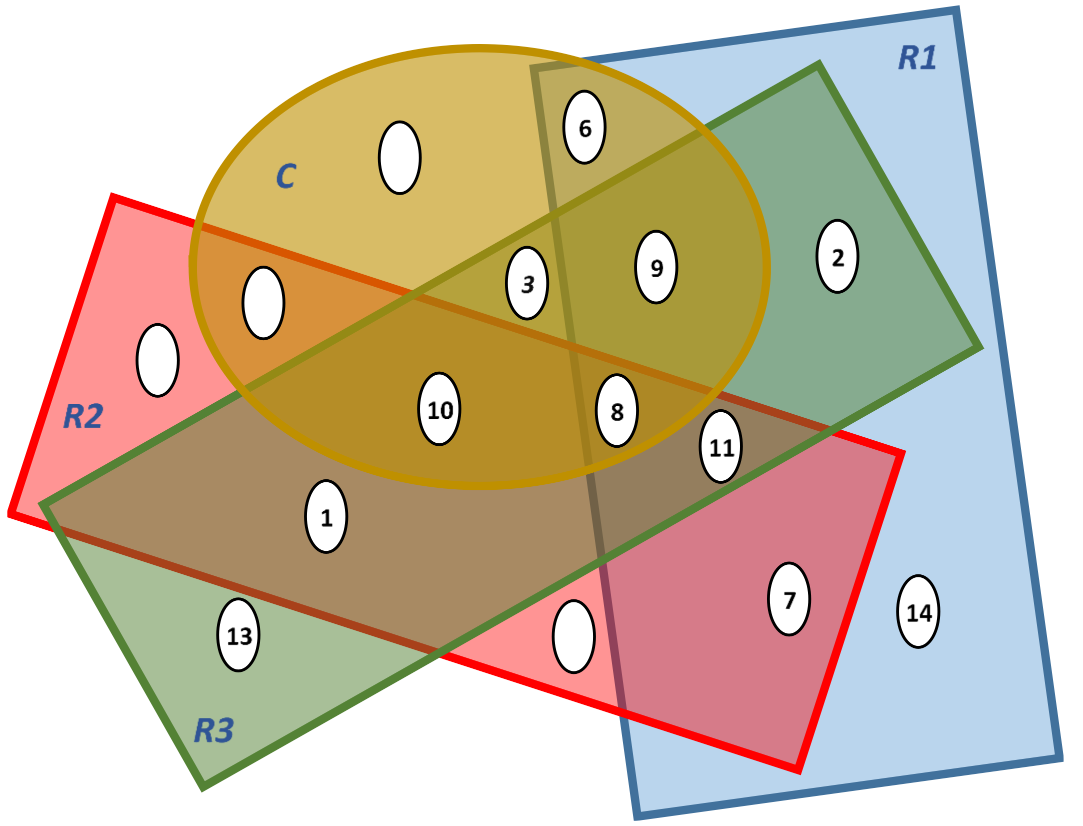


Imagen 14.

Con esto se han completado los dos rectángulos.

Seleccionamos el circulo **C**, donde ya están ubicados los elementos {6, 3, 9, 8, 10} que suman treinta y seis, es decir los dos elementos que faltan, uno tipo 1 y uno tipo 2 deben sumar veinte y uno.

Lo elementos que aún no se han ubicado son: tipo 1, {4, 12, 15} y tipo 2 {5}.

Se observa que en los de tipo 2 hay un único elemento el cinco, que sumado a los que restan del tipo 1 en ningún caso suma veinte y uno, por tanto debemos hacer algún cambio que permita continuar, obviamente el cambio deberá ser entre elementos del mismo tipo y que pertenezcan a la misma figura ya completada, es decir a R1 o R3.

El cambio escogido será cambiar el seis por el siete, ambos elementos tipo 2, que pertenecen a R1, Este cambio se observa en la Imagen 15.

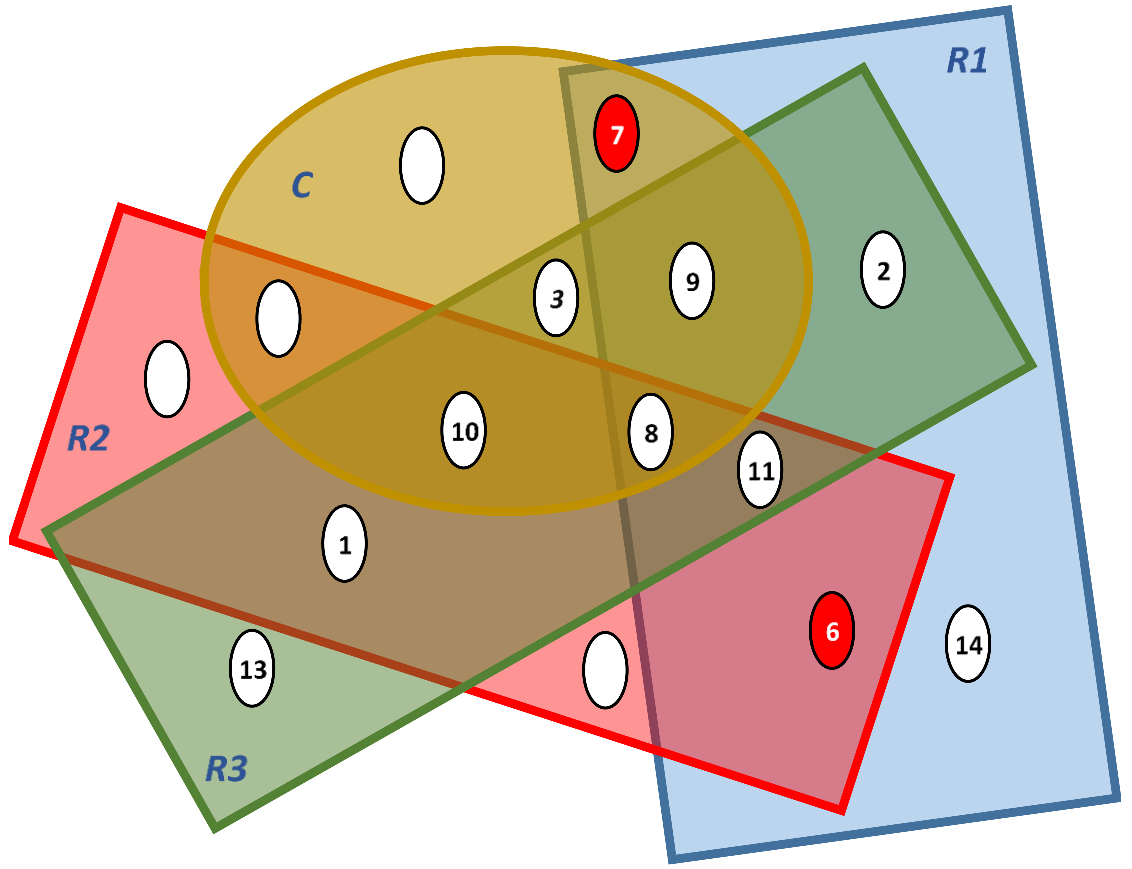


Imagen 15

Ahora los elementos del circulo **C** son {7, 8, 9, 3, 10}, que suman treinta y siete, es decir para completar debemos aumentar un elemento tipo 1 y un elemento tipo 2 que sumen veinte, la única opción que cumple esto son los elementos {5, 15}.

Consecuentemente los dos elementos que aún no se ubican serán los que completen el rectángulo R2.

En la Imagen 16 vemos ya todos los elementos ubicados.

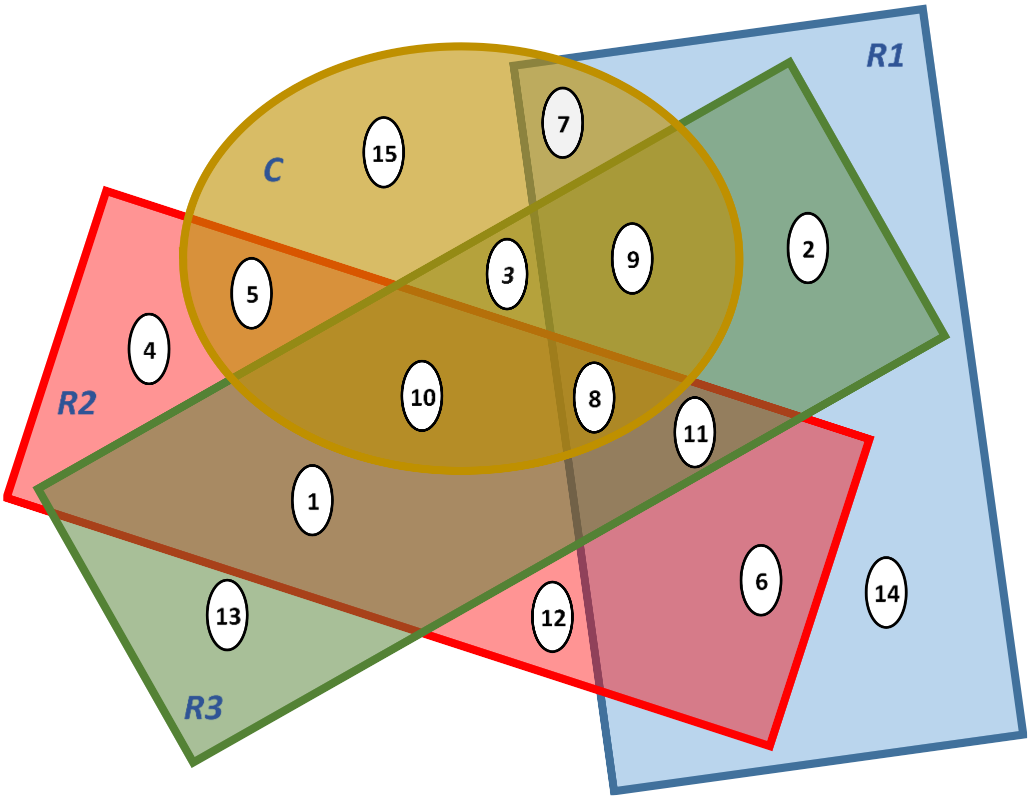


Imagen 16.

Es posible verificar que se han completado las cuatro figuras, cumpliendo las condiciones del memoreto planteado. Reiterando que esta no es la única respuesta correcta al reto.

Ejemplo 4.

Memoreto: Se han dibujado diez rectángulos, tal como se observa en la imagen 17, donde se observan dieciocho vértices, se pide ubicar en cada vértice un número de uno al dieciocho, de tal forma que al sumar los vértices de cualquiera de los diez rectángulos el resultado sea el mismo.

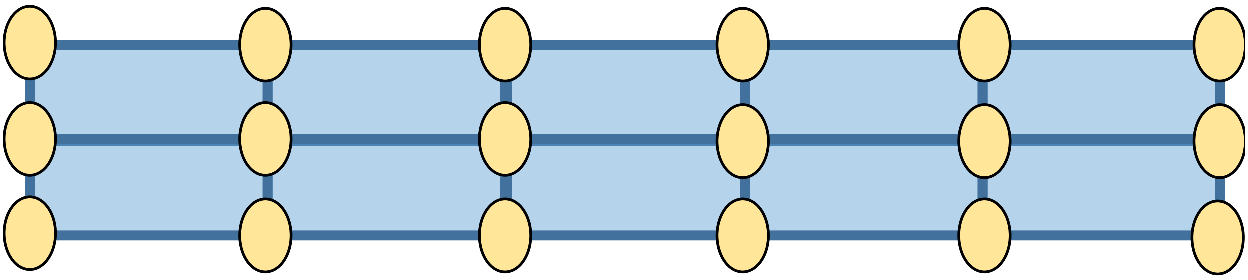


Imagen 17.

En este memoreto, tenemos diez rectángulos, unos junto a otros, cada uno con sus vértices, más como los rectángulos están adyacentes, estos vértices pertenecerán a un único rectángulo o a dos o cuatro, el desafío consiste en ubicar los números del uno al dieciocho, de tal forma que si sumamos los ubicados en los cuatro vértices de cualquiera de los diez rectángulos, el resultado sea el mismo.

Determinación de la constante del memoreto:

En primer lugar deberemos especificar el conjunto de elementos con los que trabajaremos este reto, según lo indicado en la presentación del memoreto ese conjunto es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}, luego deberemos especificar cada vértice a cuartos rectángulos pertenece, como ya dijimos, pudiendo ser que estos pertenezcan tan solo a un rectángulo, también puede darse que esto pertenezcan a dos o a cuatro rectángulos, para tener esto claro, en la imagen 18 se ha ubicado un número en cada vértice, este número nos indica únicamente a cuantos rectángulos pertenece ese vértice.

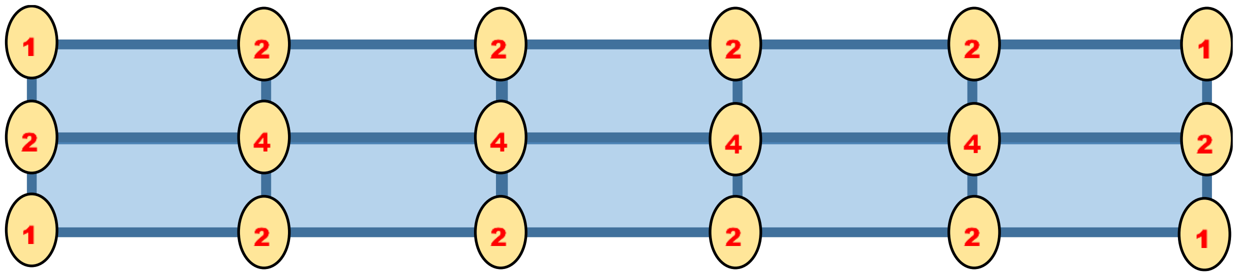


Imagen 18.

Consecuentemente de los dieciocho elementos que ubicaremos en estos vértices, cuatro estarán en únicamente en un rectángulo, diez estarán en la intersección de dos rectángulos y cuatro estarán en la intersección de cuatro rectángulos. En base de esto nos propondremos hacer una partición del conjunto de elementos dados en tres subconjuntos, cada uno de ellos que cumpla las condiciones dadas, denominándoles tipo 1, a los que pertenezcan exclusivamente a un rectángulo, tipo 2 a los que pertenezcan simultáneamente a dos rectángulos y tipo 3 a los pertenezcan simultáneamente a cuatro rectángulos.

Además, la suma total corresponderá a sumar los vértices de los diez rectángulos, donde como es lógico, los elementos tipo 1, se sumaran una sola vez, los de tipo 2, serán sumados dos veces y los tipo 3 serán sumados cuatro veces, además, partiendo del hecho que la constante de este memoreto debe ser un valor entero, que resulte de sumar los vértices de cada uno de los rectángulos, la suma total deberá coincidir con diez veces esa constante, consecuentemente la suma total debe ser un múltiplo de diez.

Busquemos entonces esas particiones:

Plantearemos una primera:

- Subconjunto de elementos tipo 1 = {1, 2, 3, 4}, estos elementos serán los que están en vértices que no tienen rectángulo adjunto, su suma es diez.
- Subconjunto de elementos tipo 2 = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,}, son elementos que se ubican en vértices que forman parte de dos rectángulos, su suma es noventa y cinco.
- Subconjunto de elementos tipo 3 = {15, 16, 17, 18}, son elementos que se ubicaran en vértices que pertenezcan a cuatro rectángulos, su suma es sesenta y seis.

Para la suma total los elementos tipo 1 sumaran una vez, los tipo 2 sumaran dos veces y los tipo 3 sumaran cuatro veces, entonces:

Suma total = 10 + 2(95) + 4(66) = 332.

Como la suma total no es un múltiplo de diez, esta partición no cumple, debe buscarse otra.

Intentemos con una segunda partición:

- Subconjunto de elementos tipo 1 = {11, 12, 17, 18}, estos elementos serán los que están en vértices que no tienen rectángulo adjunto, cincuenta y ocho.

- Subconjunto de elementos tipo 2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, son elementos que se ubican en vértices que forman parte de dos rectángulos, su suma es cincuenta y cinco.
- Subconjunto de elementos tipo 3 = {13, 14, 15, 16}, son elementos que se ubicaran en vértices que pertenezcan a cuatro rectángulos, su suma es cincuenta y ocho.

Suma total = 58 + 2(55) + 4(58) = 400.

Que si es un número múltiplo de diez.

Consecuentemente la constante para este memoreto es cuarenta.

Ubicación de elementos.

Con el proceso anterior no solo que sabemos ya cuál es la constante para este reto, además sabemos ya cuáles son los elementos tipo 1, tipo 2 y tipo 3 y donde deben ubicarse estos, esto es de gran ayuda.

Si observamos la ubicación de los rectángulos vemos que seis de estos se construyen con elementos tipo 2, cuatro de estos en la fila superior y cuatro en la fila inferior; y, elementos tipo cuatro, los cuatro que se ubican en la fila media, con esto en mente intentamos ubicar los elementos (Imagen 18).

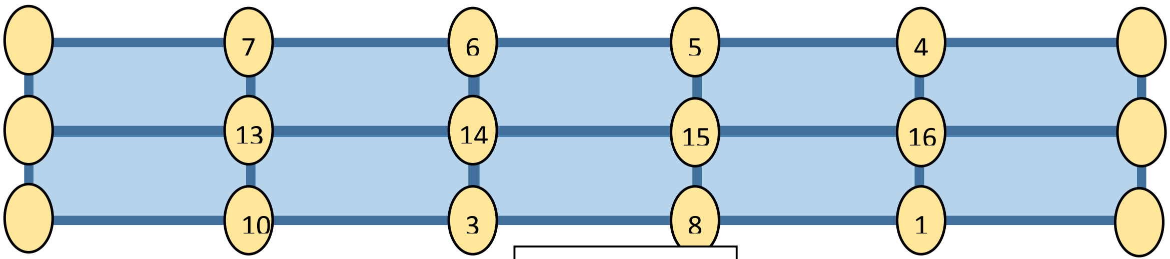


Imagen 19.

Hasta ahí se cumple lo propuesto para los seis rectángulos, más debemos completar el memoreto ubicando los siguientes elementos:

Elementos tipo 2 {2, 9} y los elementos tipo 1 { 11, 12, 17, 18}.

Si observamos lo construido, vemos que hay una periodicidad en las filas de los rectángulos, así en los rectángulos superiores los vértices de las columnas suman siempre veinte y en los rectángulos inferiores suma veinte y tres y diecisiete alternados, con los elementos que faltan por ubicarse no es posible mantener ese patrón, por lo que afirmaremos que no es posible satisfacer el memoreto con esta alternativa.

Intentamos otra:

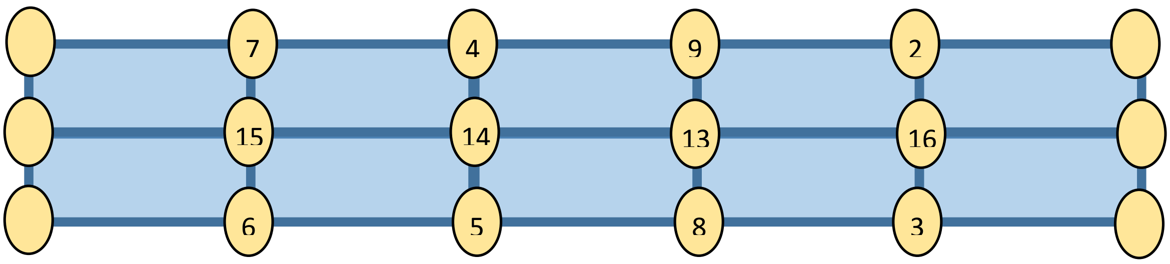


Imagen 20.

Ahora, se puede observar en la imagen 19 que la periodicidad para las columnas de los rectángulos superiores es veinte y dos y dieciocho; y, para los rectángulos inferiores es veinte y uno y diecinueve, además los elementos que deben ubicarse para completar son:

Elementos tipo 1 {11, 12, 17, 18} y los tipo 2 son {1, 10}.

Vemos que con estos elementos si es posible mantener la periodicidad planteada, en la imagen 21.

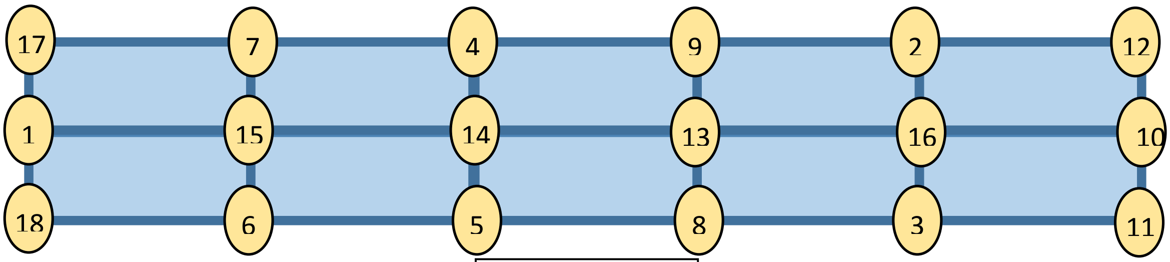


Imagen 21.

Que obviamente es una de las soluciones al memoreto planteado, ratificando que no es la única solución, esta es una de varias, se ha ido construyendo en base de las selecciones que hemos hecho donde siempre ha existido más de una alternativa.

Ejemplo 5

Entre las relaciones matemáticas curiosas, se tiene las estrellas mágicas, que consiste en estructuras geométricas, con la forma de estrellas, con números ubicados en los puntos de corte de los lados, y cuya suma por segmento es constante, en base de lo indicado esta estructura

Memoreto: En la estrella mágica de cinco puntas, imagen 22, donde se han ubicado valores en cada uno de los puntos de corte de sus, hallar el valor de X que permita que se cumpla las condiciones de una estrella matemática.

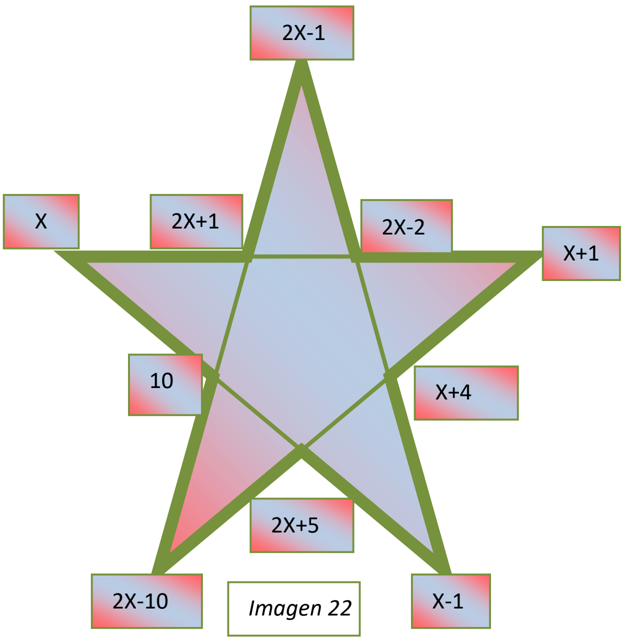


Imagen 22

Determinación de la constante del memoreto:

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este caso introducimos la variable X, y el memoreto es justamente encontrar el valor de esa variable.

Para encontrar la constante de este reto, simplemente sumaremos los valores de los cinco lados, y esta suma es:

L1: (2X-1) + (2X-2) + (X+4) + (X-1) = 6X

L2: (X +1) + (X+4) + (2X+5) + (2X-10) = 6X

L3: (X-1) + (2X+5) + (10) + (X) = 4X +14

L4: (2X-10) + (10) + (2X+1) + (2X-1) = 6x

L5: (X) + (2X +1) + (2X-2) +(X+1) = 6x

Los elementos de los cuadro lados suman 6X, por lo que es obvio afirmar que la constante es 6X.

Ubicación de valores:

Para determinar los valores que deben ubicarse en cada elemento debemos recordar que por definición la constante del memoreto debe ser la suma de los elementos en cada uno de los lados, recordamos entonces que los elementos del lado tres suman 4X + 14, consecuentemente, para que se cumpla la característica de estrella matemática, debe cumplirse que:

4X + 14 = 6X.

Ecuación de primer grado, cuya solución es **X = 7.**

Hasta aquí se ha cumplido lo propuesto en el reto. Por tanto si remplazamos cada elemento de la estrella matemática, sustituyendo el valor de la variable tendremos lo expuesto en la imagen 23.

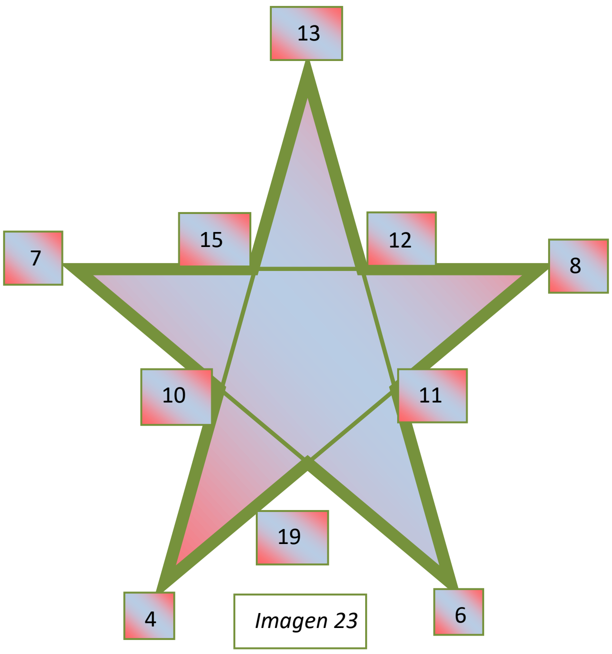


Imagen 23

Efectivamente, cada uno de los elementos ubicados en la estrella matemática es distinta y si sumamos los elementos de cualquiera de los cinco lados es cuarenta y dos.

Ejemplo 6

Memoreto: Se han dibujado dos triángulos, una elipse y un rectángulo, generando dieciséis puntos de corte, tal como se observa en la imagen 24, se pide ubicar en cada corte un número entero múltiplo de cinco entre cinco y ochenta, de tal forma que al sumar los ubicados en el entorno de cualquiera de las cinco figuras, el resultado sea el mismo.

Este memoreto se asemeja a los ya presentados antes, especialmente al ejemplo 2, en vista de que tiene un puntos que está en la intersección de tres figuras, lo adicional es que en este caso el conjunto de los números a ubicarse ya no es números enteros consecutivos sino múltiples de cinco.

Desarrollo

Está claro que podríamos seguir el mismo proceso para solucionar este reto, claro teniendo en cuenta que en ese caso el conjunto de los números a ubicar es {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80}. Sin embargo es posible, y quizá más sencillo trabajar inicialmente con el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} y una vez obtenida la respuesta, cambiar cada elemento por otro que resulte de multiplicar por cinco propuesta en la solución.

Por las propiedades de los números reales, al multiplicar a todos los elementos de cada figura por cinco, su suma será cinco veces la suma de la solución inicial, por tanto la condición del memoreto se cumplirá.

Entonces procederemos con esta nueva alternativa, es decir primero solucionaremos el memoreto ubicando los elementos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}.

Siguiendo el proceso indicado la solución inicial será lo expuesto en la imagen 25.

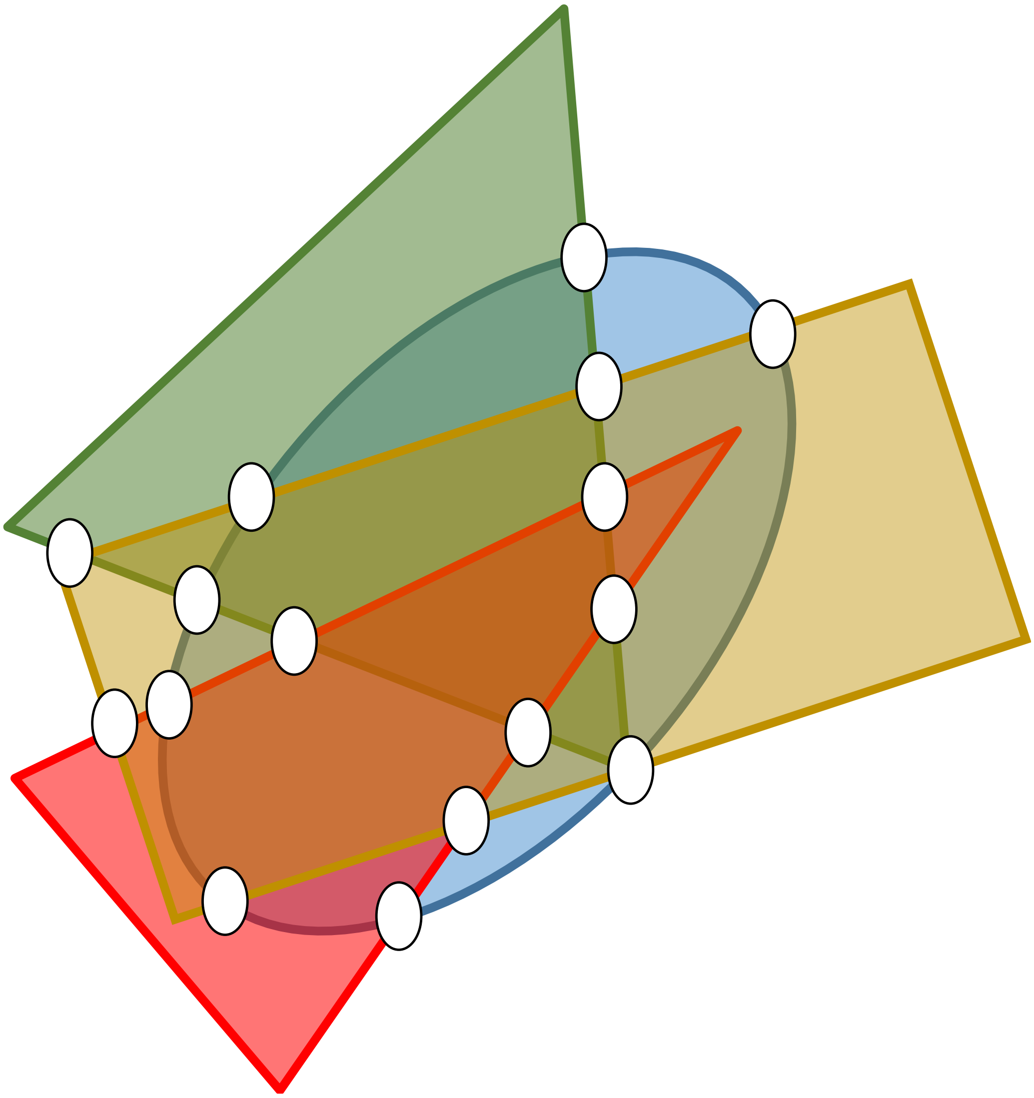


Imagen 24.

En esta solución vemos que se han ubicado, sin repetición, los enteros consecutivos entre uno y dieciséis y si sumamos los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras, el resultado es sesenta y nueve.

Entonces o que haremos será cambiar cada elemento por su múltiplo, multiplicando cada uno de los estos por cinco, el resultado se observa en la imagen 26.

Donde se observa que se han ubicados los elementos propuestos y que la suma de los elementos ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras es trescientos cuarenta y cinco.

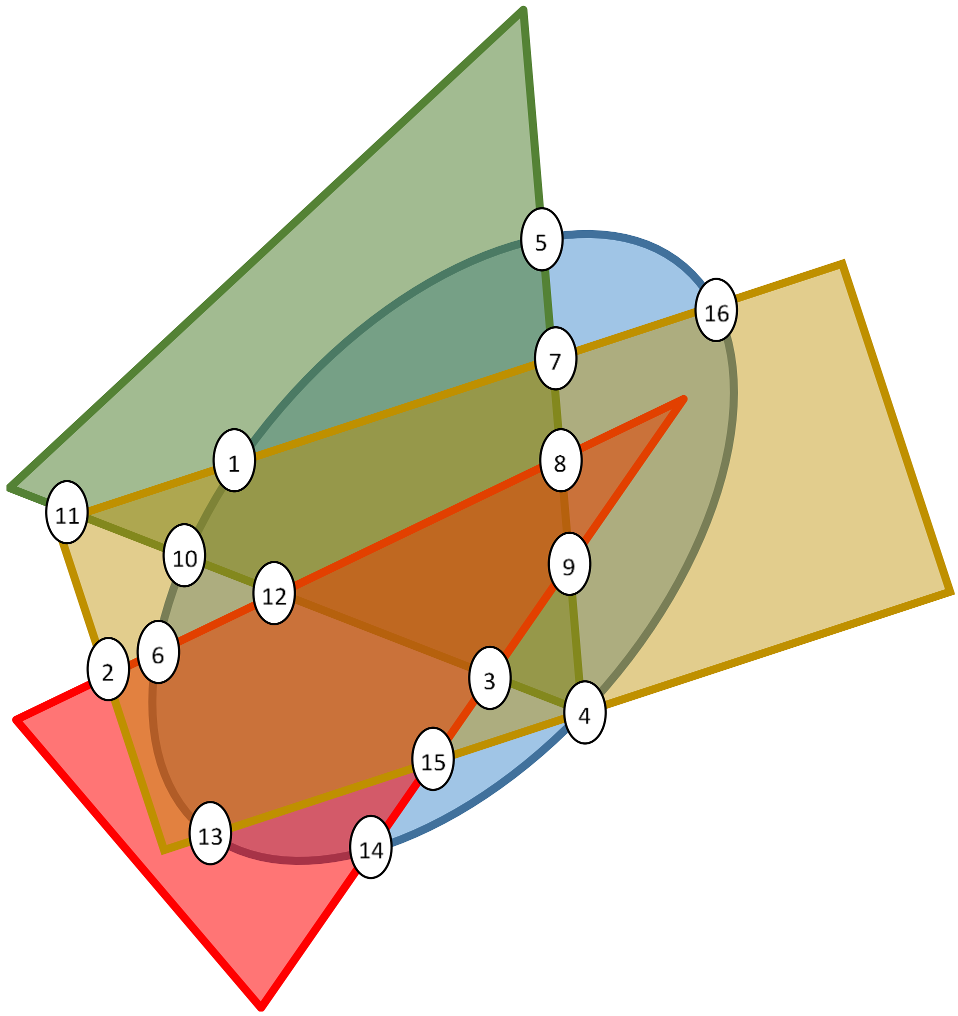


Imagen 25

Esta solución, a la vez permite generalizar un resultado, y es que si se tiene una solución de este tipo de retos para un conjunto de elementos que constituyan una serie aritmética, si transformamos esa serie mediante una función lineal, la solución obtenida se cumple también para el conjunto resultante, y la constante del memoreto resultará también de la transformación aplicada a la constante obtenida inicialmente.

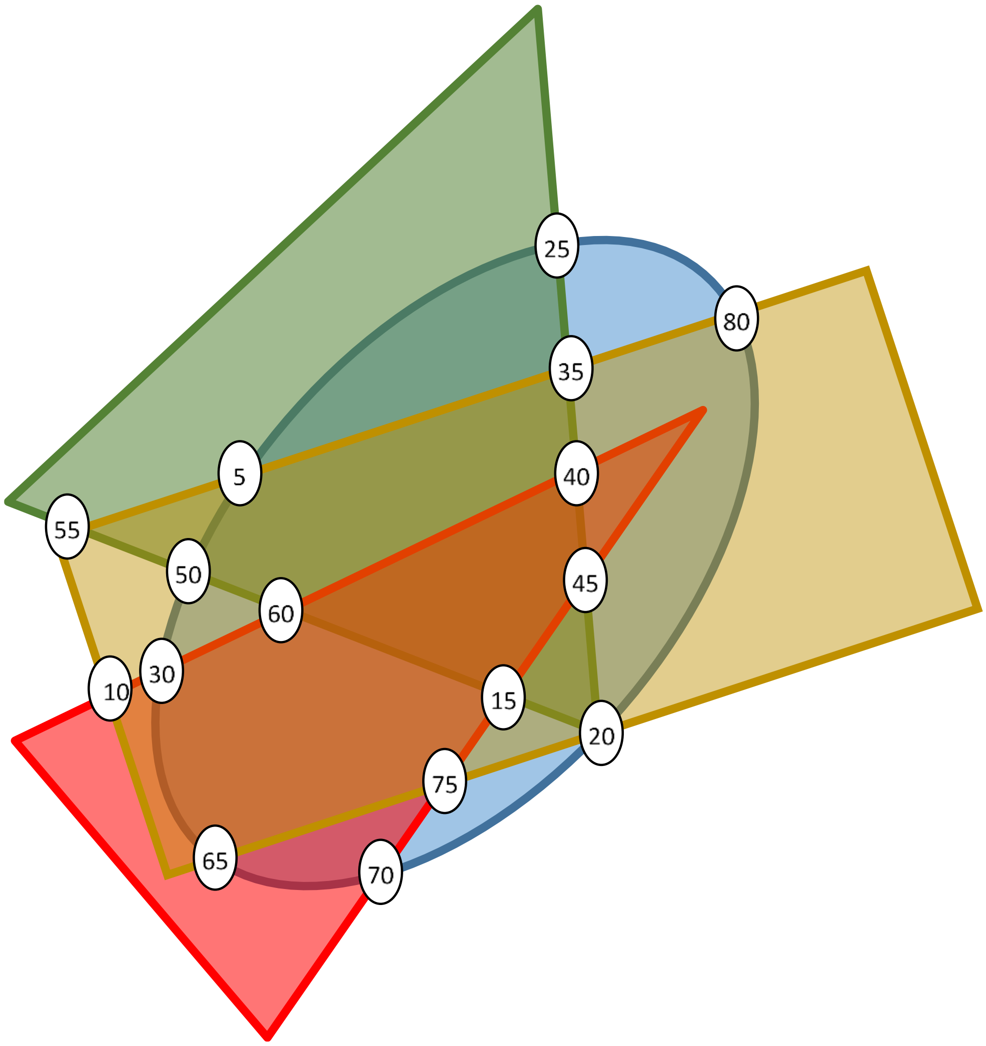


Imagen 26.

CAPITULO IV

PROCEDIMIENTO

De lo vivenciado en los talleres se puede indicar que estas actividades llaman la atención desde el inicio, el hecho de presentarlos en un formato de desafío hace que los participantes se interesen e intenten construir una solución al desafío, pudiendo notarse un cambio en su comportamiento en el proceso.

Los primeros memoretos que presentamos son muy simples, normalmente de ocho a diez regiones de tres figuras entrelazadas (Imagen 27), algunos de ellos ya publicados en las redes sociales. Inicialmente todos intentan construir una respuesta individualmente ubicando los elementos del conjunto propuesto al azar que cumplan las condiciones, algunas veces lo logran en la mayoría de los casos hay que guiar y apoyar algo hasta que se construya una respuesta correcta, en todo caso siempre es manifiesta la alegría de sus autores, quienes se convierten en un gran apoyo para el proceso ya que se adueñan del proceso.

MEMORETO: Dentro de tres círculos grandes ubicamos 7 pequeños, solicitamos que coloquen allí números enteros del 1 al 7, de forma que si la suma de los cuatro círculos pequeños que están dentro de cada grande de igual resultado en los tres casos.

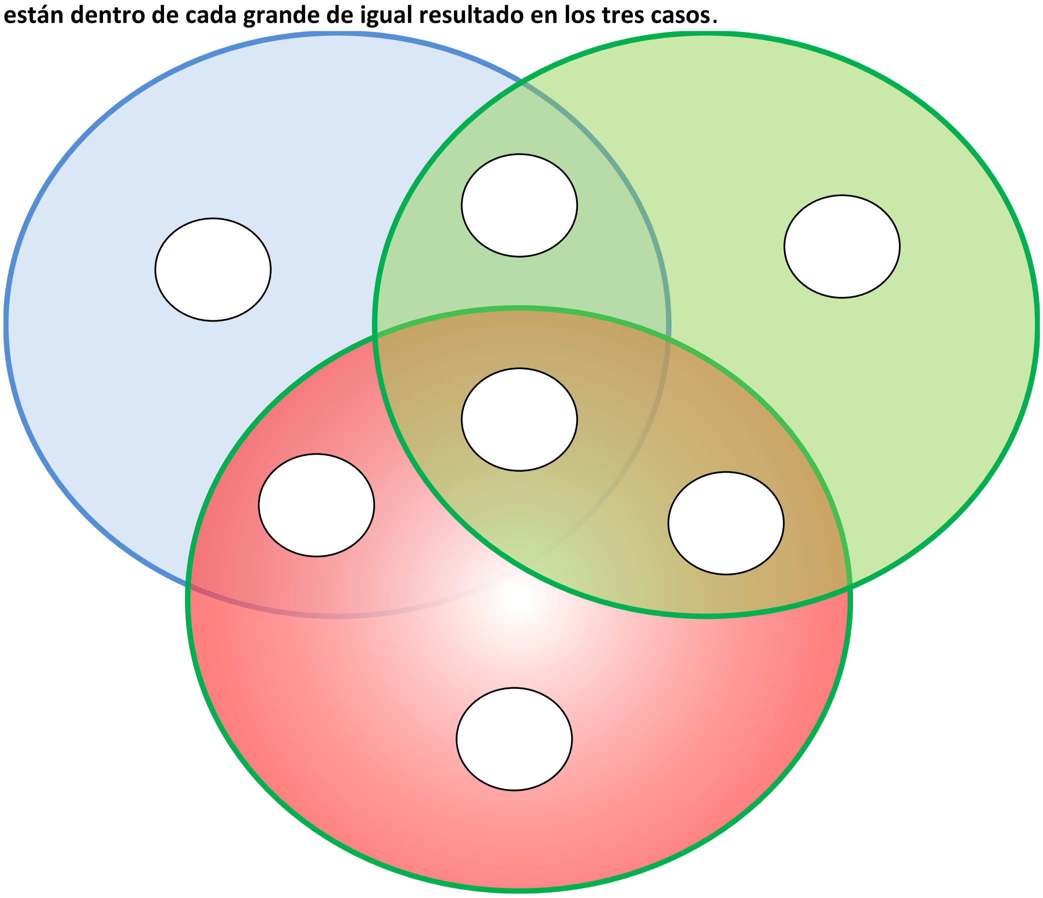


Imagen 27.

Luego de presentar el primer resultado correcto, uno de los varios posibles (imagen 28) se recomiendo pedir otros resultados y se logra mayor participación a la vez que se consensua la idea de que estos retos no son tan difíciles como inicialmente se piensa, generando un ambiente de confianza.

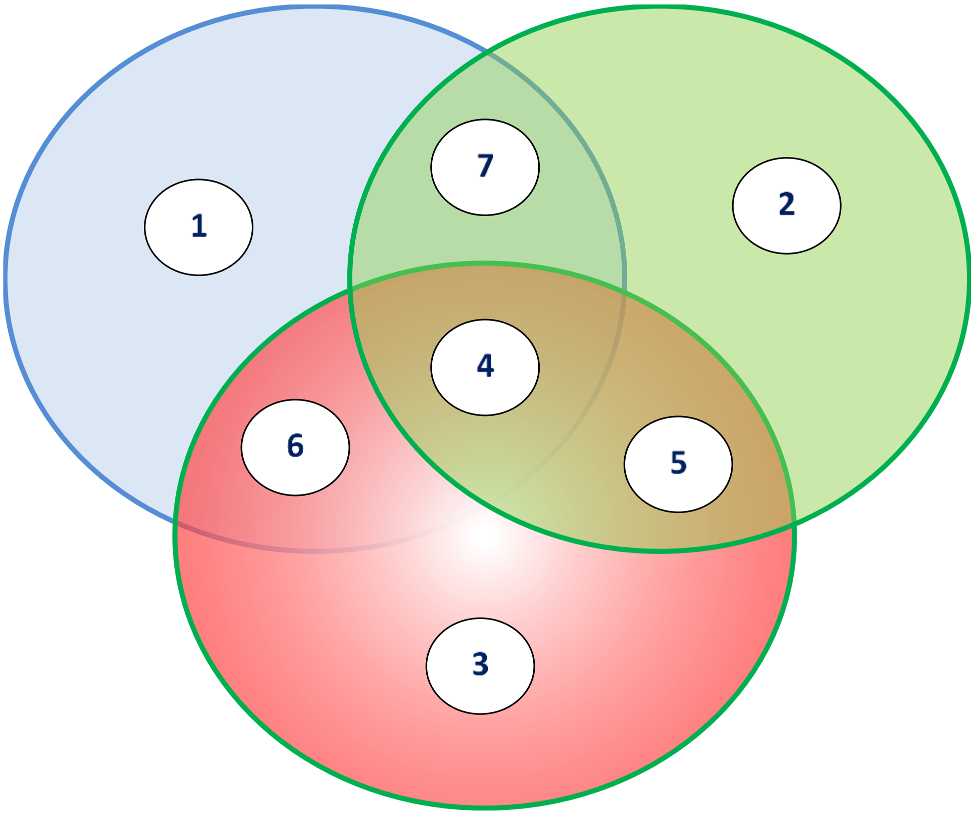


Imagen 28.

Es bueno siempre reflexionar con los docentes participantes sobre lo que sucede con este memoreto introductorio ya que el mismo servirá para sistematizar el proceso, luego se trabaja con retos de mayor dificultad, como los presentados aquí en los ejemplos, introduciendo nuevos elementos al análisis, mismos que surgen de los participantes y que responden a sus experiencias y a sus reflexiones.

Es significativo como el trabajo colaborativo va surgiendo en estos procesos, los participantes buscando lograr una respuesta correcta se agrupan y apoyan, sugiriendo y compartiendo sus ideas, generando los espacios para mostrar su creatividad y valorar y criticar fundamentadamente el trabajo de los compañeros.

Siempre esas reflexiones permiten explicar el desarrollo de las matemáticas y de la ciencia en general ya que posibilita identificar los siguientes pasos:

1) **Interés por resolver algo nuevo**. Al presentar el desafío el interés motiva por encontrar una solución al problema específico, lo que hace que cada participante intente y se arriesgue a presentar una solución posible. Aquí se trabaja el tanteo, buscando construir una respuesta.
2) **Sistematización del proceso**. Una vez que los participantes construyen una respuesta correcta, se busca sistematizar el proceso, a fin de que sea posible establecer un proceso que facilite resolver desafíos similares.
3) **Validación del proceso**. Una vez que se logrado la sistematización del proceso, se valida el mismo buscando que el mismo permita resolver estos retos en general, generando complejidad y profundidad de los contenidos.

En el paso 3, en os talleres se reflexiona también sobre los contenidos matemáticos que son trabajados en estos retos sin proponerse específicamente más bien incorporándolos por la necesidad de cumplir con el desafío, lo que constituye en sí una validación de todo el proceso.

En esta validación es necesario también hacer hincapié en el hecho de que la sistematización a más de establecer un proceso adecuado permite, hace que el sentido de posibilidad de construir un resultado se convierta en una certeza para construir un resultado o para fundamentar que esa construcción no es posible.

Para explicar esto recurriremos al ejemplo del memoreto introductorio, si nos quedamos en procedimientos de tanteo, indicaremos que hay cinco mil cuarenta formas distintas de ubicar los elementos sobre os círculos y que treinta de ellas cumplen las condiciones del reto, es decir aproximadamente seis de mil, es decir si hacemos mil construcciones al azar tendremos aproximadamente seis soluciones correctas. Es menester indicar que este porcentaje es mucho menor en retos con más regiones o con más elementos.

En cambio si utilizamos el proceso sistematizado, directamente podremos construir esas treinta respuestas y además podremos fundamentar por ejemplo por que ninguna de esas respuestas puede tener el seis en la región donde se intersecan los tres círculos.

El taller concluye con una reflexión sobre como este proceso contribuye a presentar las matemáticas de una forma amigable, como una herramienta que nos ayuda a entender el entorno, donde las formulas o teoremas constituyen los resultados finales de estos procesos de construcción de conocimiento.

Aseverando que la enseñanza de matemáticas, no debe centrarse en presentar y entender los algoritmos, teoremas y fórmulas sino más bien en la construcción activa y el entendimiento reflexivo e individual de estos procesos.

Relación con contenidos matemáticos.

De los aportes obtenidos es posible plantear estos retos como apoyo para trabajar algunos contenidos matemáticos, enumeramos a continuación algunas de estas:

a) Calculo numérico. La resolución de estos retos en si requieren un desarrollo y un entendimiento de las operaciones matemáticas, comenzando con la suma y resta más posibilitando trabajar temas de multiplicación, donde el conjunto con el que se trabaja ya no son números enteros consecutivos, más es posible desarrollarle.
   También es posible trabajar potenciación, simplemente recordando la propiedad de multiplicar potencias de igual base, en los resultados se suman los exponentes, es decir si tengo un memoreto solucionado para la suma, esos elementos se tomaran con potencias de una base cualquiera (distinto de uno) y tendremos un memoreto donde los elementos son potencias y su producto, por figura, será la constante del reto.
b) Conjuntos numéricos. Si bien los retos están construidos para conjuntos de números enteros consecutivos, es posible reafirmar la definición de este conjunto y proponer ampliarlo a otro tipo de conjuntos ya sean enteros negativos, decimales, números primos, irracionales o reales.
c) Series de números. Los memoretos propuestos trabajan siempre sobre conjuntos de series de números, es posible incluso generar relaciones matemáticas a través de operaciones lineales e incluso de proponerlos como potencias de una misma base, manteniendo condiciones de los retos o incluso generando unas nueves que la hacen más interesantes.
d) Conjuntos. Las ideas de la teoría de conjuntos están implícitas en todos estos memoretos, ya que el seleccionar los que están en cada figura es ya una relación de pertenencia, además los conceptos de intersección, unión, inclusión, contención, diferencia, complemento o universo está siempre presente, abordándose desde lo práctico y lo operativo.
   Además como se ha visto en los ejemplos presentados aquí, los procesos de solución se sustentan en la cardinalidad y la pertenencia de los elementos.
e) Geometría. Los memoretos en su forma graficas se sustentan en las figuras geométricas básicas y muestran las distintas formas que pueden surgir de su interrelación, dando valor significativo para los retos a las áreas internas o los vértices que lo conforman.
f) Algebra. En todos los memoretos está presente la idea de buscar un elemento que cumpla tal o cual condición que coincide con las ideas algebraicas de variable e incógnita, además como se vio en el ejemplo cinco, es posible trabajar temas específicos de ecuaciones.

g) Combinatoria y probabilidades. El pensar el conjunto de las posibles soluciones a cada uno de los retos permite desarrollar temas de combinatoria y probabilidades.
h) Lógica Matemática. Este tema es el que se desarrolla todo el tiempo, y se lo hace respetando la individualidad de cada uno de los participantes, ya que son ellos quienes van estructurando sus procesos y construyendo su conocimiento a través de actividades y estrategias pensadas, propuestas y validadas por cada uno de ellos.

Reto: Se tiene el conjunto de elementos {o, c, i, h, l, m, b, u, d, a, o, r, e}, ubicar estos elementos en el siguiente grafico de tal forma que las ubicadas dentro de cada circulo constituyan las letras de un país de Sur América.

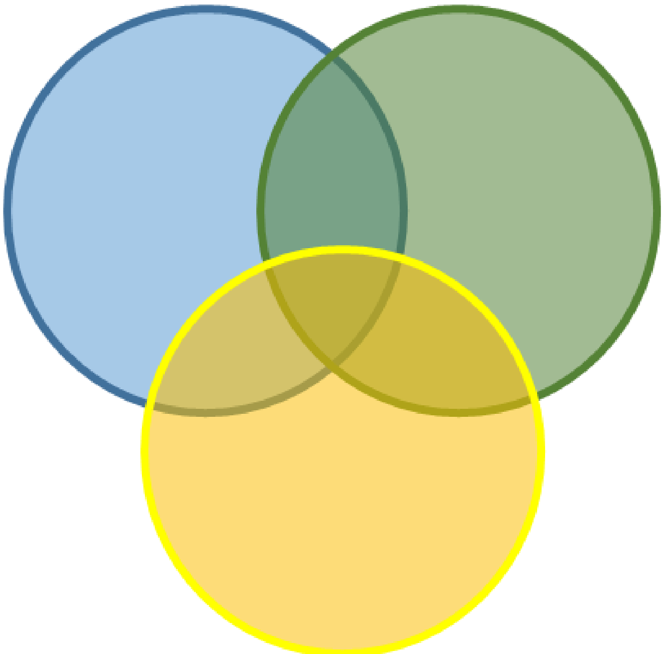


Imagen 29

Vale anotar que en cuanto a la profundidad del contenido los memoretos pueden adaptarse a temas de inicial, educación básica o bachillerato, donde simplemente que lo propone deberá tomar en cuenta esa condición y desarrollarlo respetando esa circunstancia.

Más el trabajar con estos retos, permite además trabajar ciertos temas de interdisciplinariedad, esto lo explicamos con el ejemplo que se presenta en la imagen 29. Donde el memoreto responde a la lógica de los que proponemos en esta metodología, más el contenido en si tiene que ver con ciencias sociales y con lengua y literatura.

Es claro que para resolver este memoreto es necesario conocer los nombres de los países de Sur América, además de como estructurar esas palabras y por supuesta ubicar en cada una de las regiones de los círculos, la solución se observa en la imagen 30, donde se ve claramente que los pises son: Ecuador, Colombia y Chile.

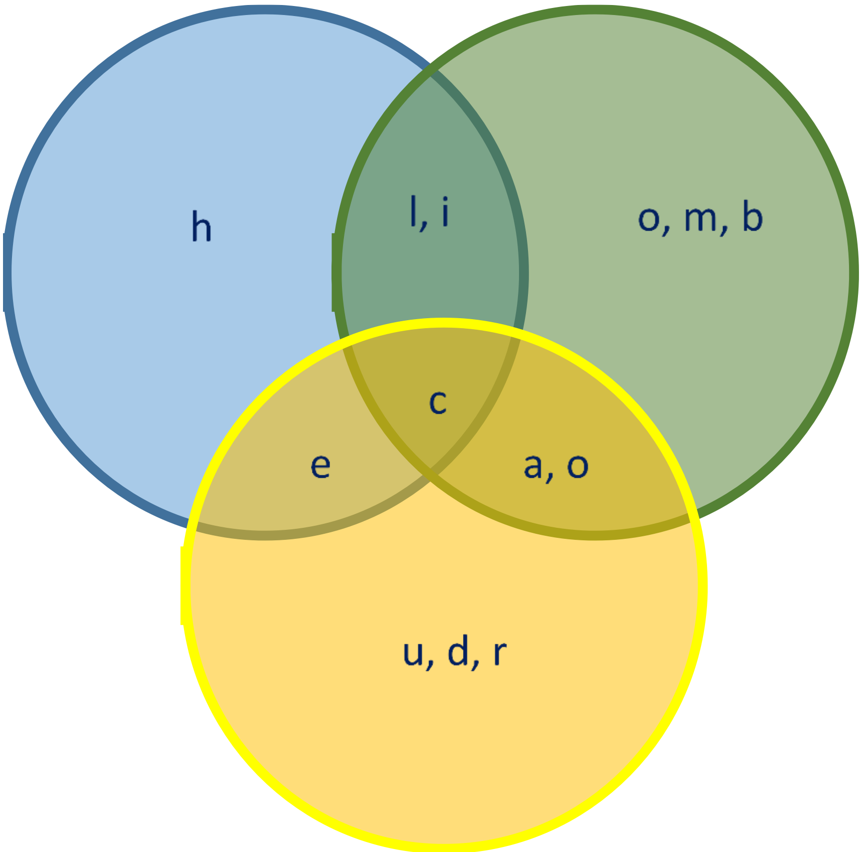


Imagen 30.

CAPITULO V

RESULTADOS OBTENIDOS

Para validar la metodología de los memoretos como apoyo a los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, lo socializamos, buscando que los actores directos de los procesos de enseñanza, es decir los docentes de las unidades educativas ecuatorianas nos ayuden y enriquezcan la propuesta con sus opiniones.

Para ello utilizamos tres medios: Talleres a Docentes, Presentación de ponencias y conferencias, difusión masiva a través de medios de comunicación. A continuación expondremos los resultados obtenidos.

Talleres a docentes.

Estos retos y sus ejemplos de resolución han sido presentados a docentes de básica superior y bachillerato en los talleres de “Enseñanza de Matemáticas Con Material Concreto”, que han sido organizados con la Subsecretaria de Tecnologías Educativas del Ministerio de Educación de Ecuador y el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación y la Cultura, OEI; y, en otros talleres de diversos eventos en los que hemos participado.

En esos espacios hemos presentado a los docentes participantes un instrumento a fin de evaluar el impacto y los posibles usos que puede hacerse de estas actividades para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Anexo 1).

El instrumento consta de una primera parte de datos generales de los participantes, luego cinco preguntas cerradas sobre la percepción de los docentes participantes en los talleres con respecto al uso de este tipo de retos en el proceso de enseñanza de las matemáticas y una último espacio donde se pide sugerencias para lograr efectividad en la enseñanza con uso de estos retos como recurso de aula.

Este instrumento se aplicó a una muestra aleatoria significativa de los participantes en los talleres mencionados. Estos talleres se desarrollaran en las ciudades de: Cuenca, Quininde, Santa Elena, Nueva Loja, Ambato, Manta y Machala.

En total asistieron a los talleres trescientos dos docentes del nivel básico superior y bachillerato, de ellos ciento noventa y cinco eran profesores de matemáticas explícitamente, recabamos información a estos reconociendo que su desempeño como profesores de la asignatura apoyaría el objetivo de esta investigación.

En lo medular el instrumento consta de las siguientes preguntas:

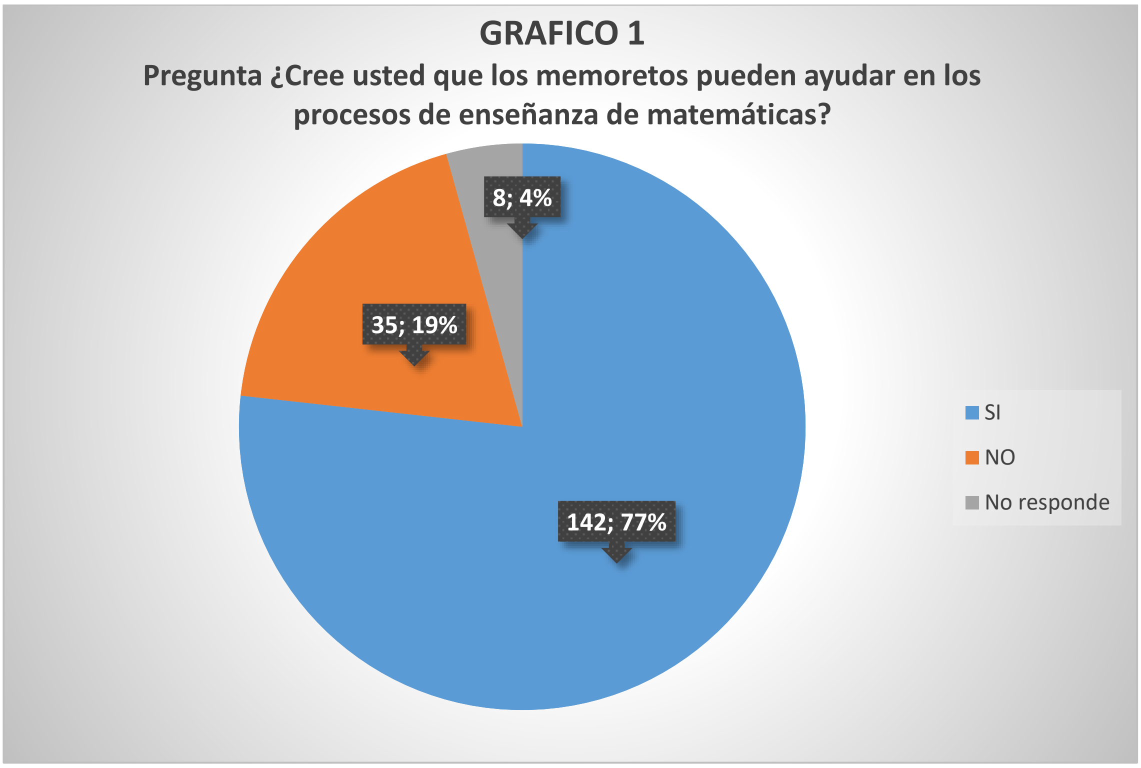
1. ¿Cree usted que este tipo de retos puede ayudar en los procesos de enseñanza de matemáticas?
2. A su criterio, ¿piensa usted que los retos matemáticos generan interés en los estudiantes?
3. ¿Qué contenidos del currículo oficial estima usted que pueden ser abordados con ayuda de los retos matemáticos presentados en el taller?
4. El currículo oficial propone que el perfil de salida del bachiller ecuatoriano es que sea un ciudadano crítico y reflexivo caracterizado por ser justo solidario e innovador, con ¿Cree usted que el tipo de retos matemáticos apoyan para formar el bachiller que propone ese currículo?
5. ¿Utilizaría usted este tipo de retos matemáticos en su desempeño como docente?

Los resultados obtenidos para estas preguntas fueron los siguientes:

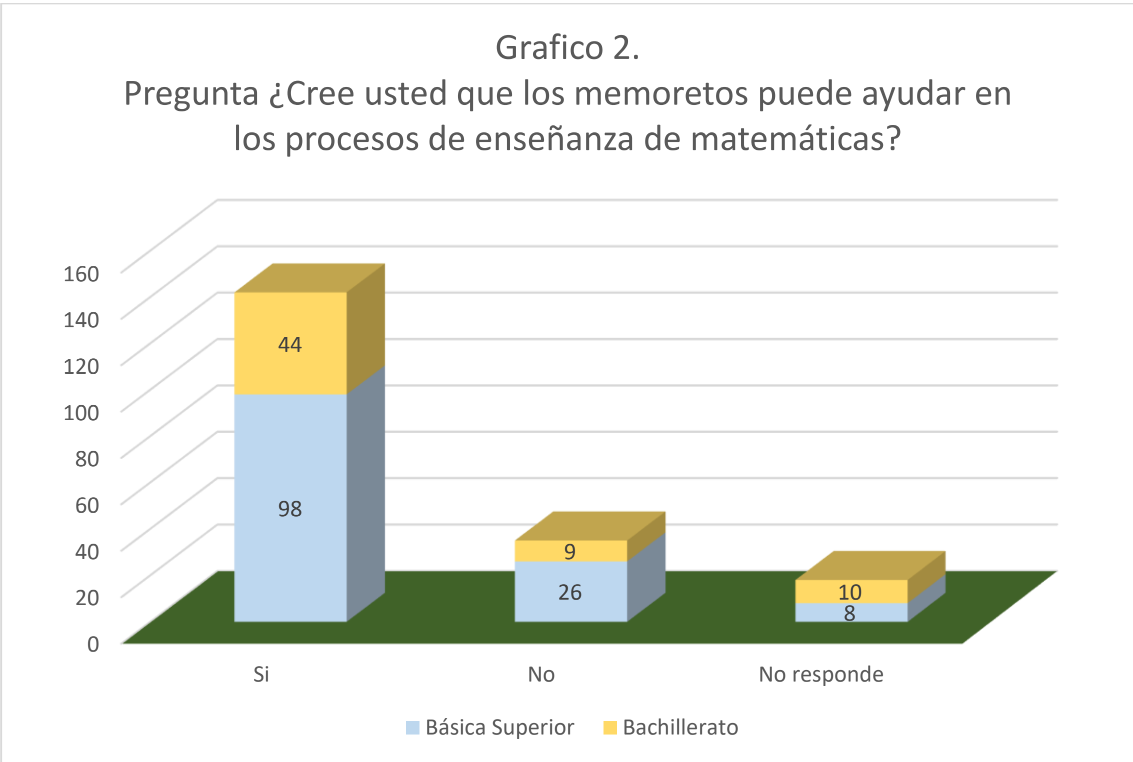
De los docentes que participaron llenando el cuestionario, 132 fueron docentes de básica nivel superior y 63 son docentes de bachillerato.

A la primera pregunta, 142 respondieron que si, 35 respondieron que no y 18 no respondieron

Este resultado se ha plasmado en el grafico 1.



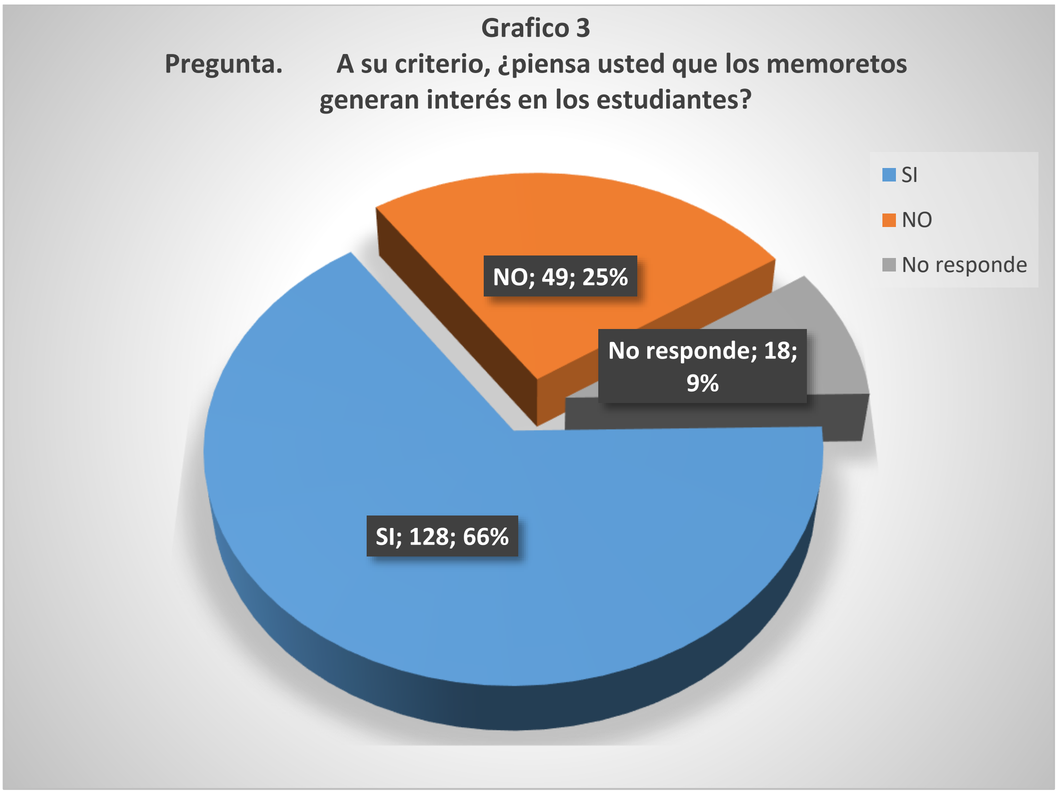
En el grafico 2. Vemos como se distribuyen las respuestas a la primera pregunta con respecto al nivel de desempeño de los docentes.



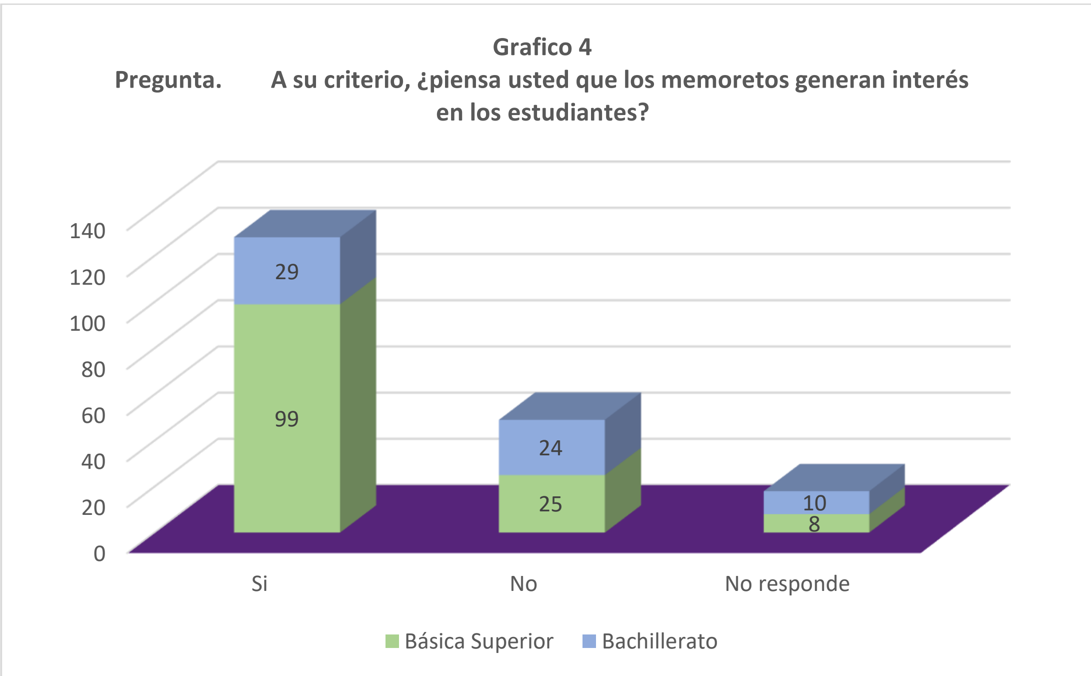
Está claro que se reconoce que estas actividades pueden ayudar para los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, llama la atención que quienes no responden a

Esta pregunta, mayoritariamente son docentes de bachillerato.

En el grafico 3, vemos la distribución porcentual de las respuestas a la segunda pregunta.

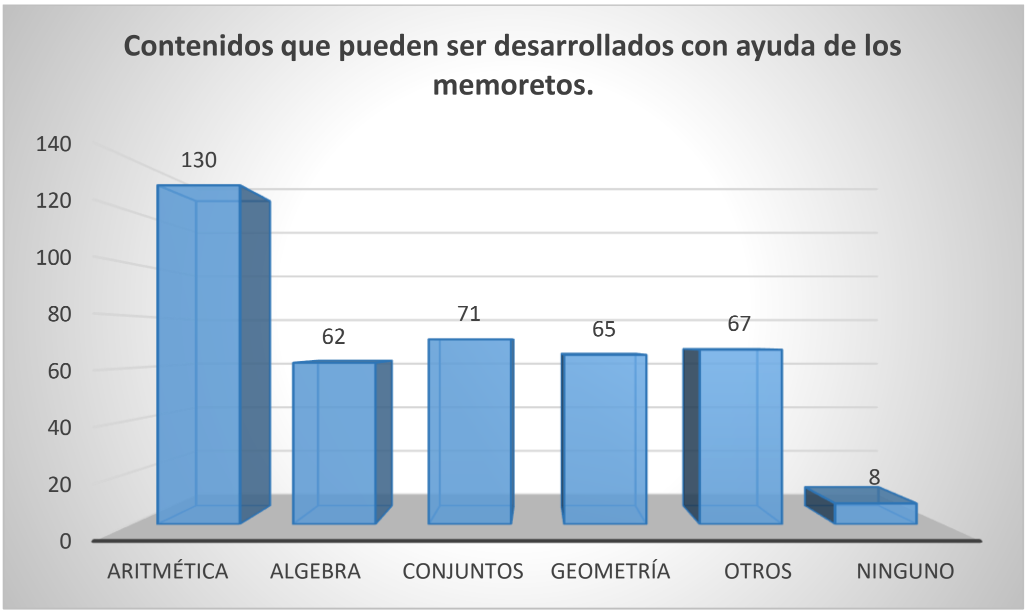


En el grafico 4, se observa las respuestas de la segunda pregunta, con respecto al nivel de desempeño de los docentes.

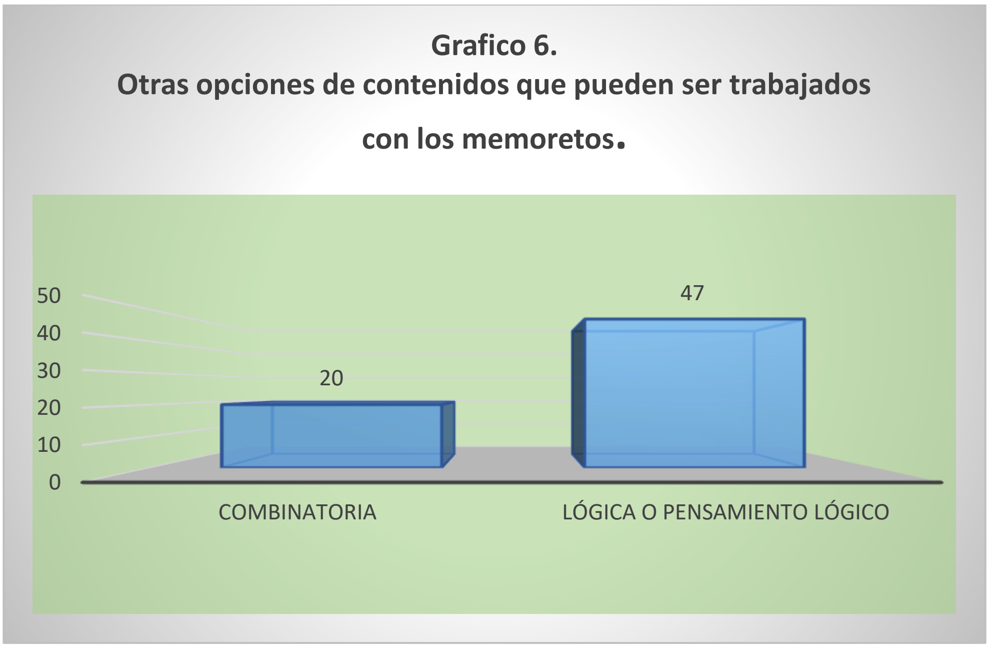


A esta pregunta, la gran mayoría indican que este tipo de retos si genera interés, aunque se observa que a nivel de los docentes de bachillerato aumenta el número de ellos, con respecto a la pregunta anterior, que indican que este tipo de retos no genera interés. Se mantiene el número de docentes de bachillerato que no responden a esta pregunta.

En el grafico 5, tenemos las frecuencias de las respuestas a la pregunta tercera y muestra los contenidos, que a criterio de los docentes, pueden ser trabajados con ayuda de estos retos. En esta pregunta los docentes podían seleccionar hasta dos alternativas.

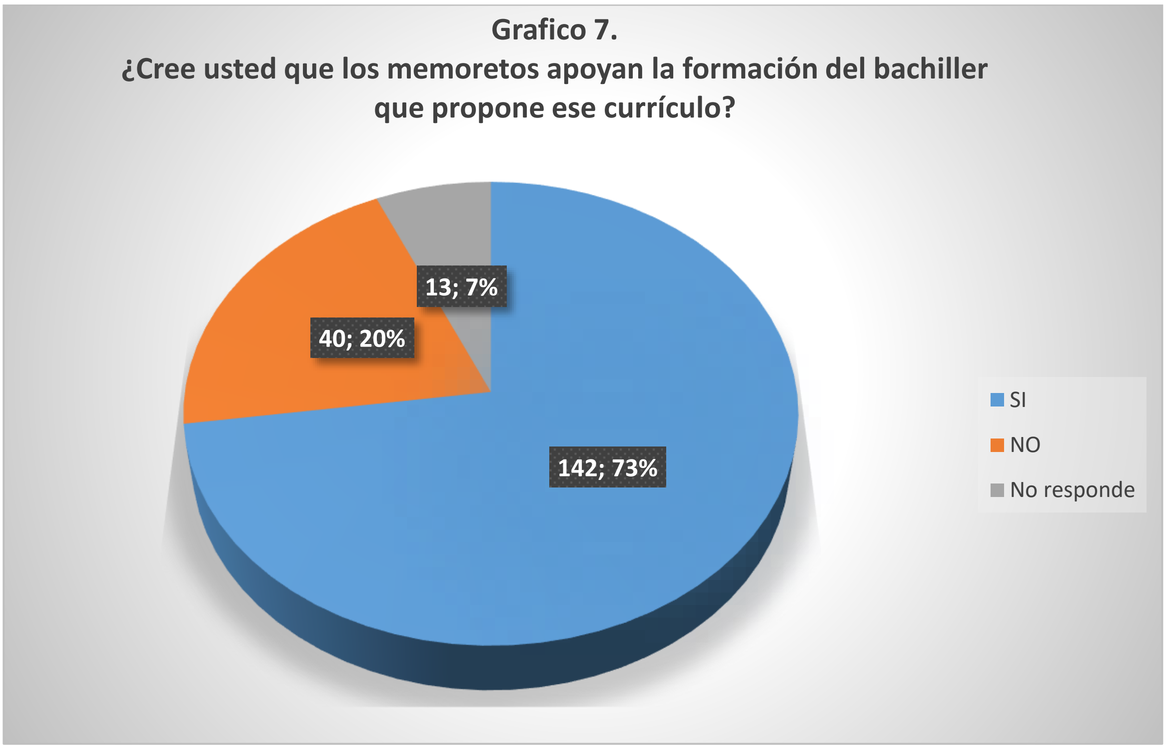


En la opción de otros existieron varias opciones, que se pueden resumir el grafico 6.

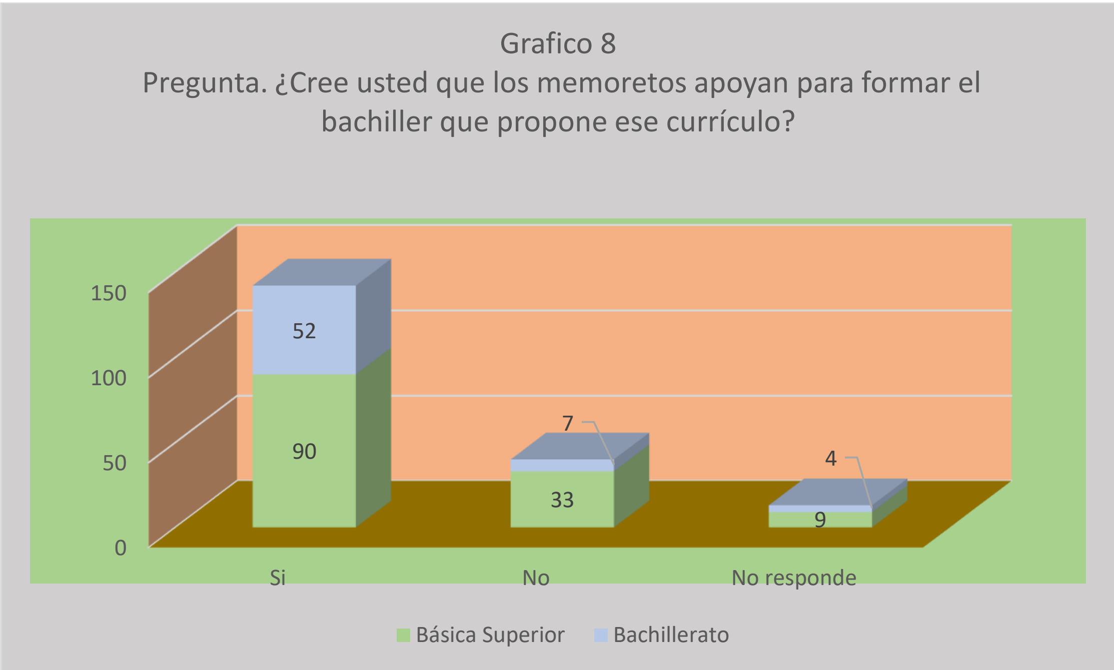


Se indica que mayoritariamente estos retos apoyan las operaciones aritméticas, aunque se reconoce otras ramas de las matemáticas, vale recalcar el número significativo de docentes que indican que estos retos apoyan procesos de lógica matemática

Con respecto a la cuarta pregunta, los resultados se observan en el grafico 7.

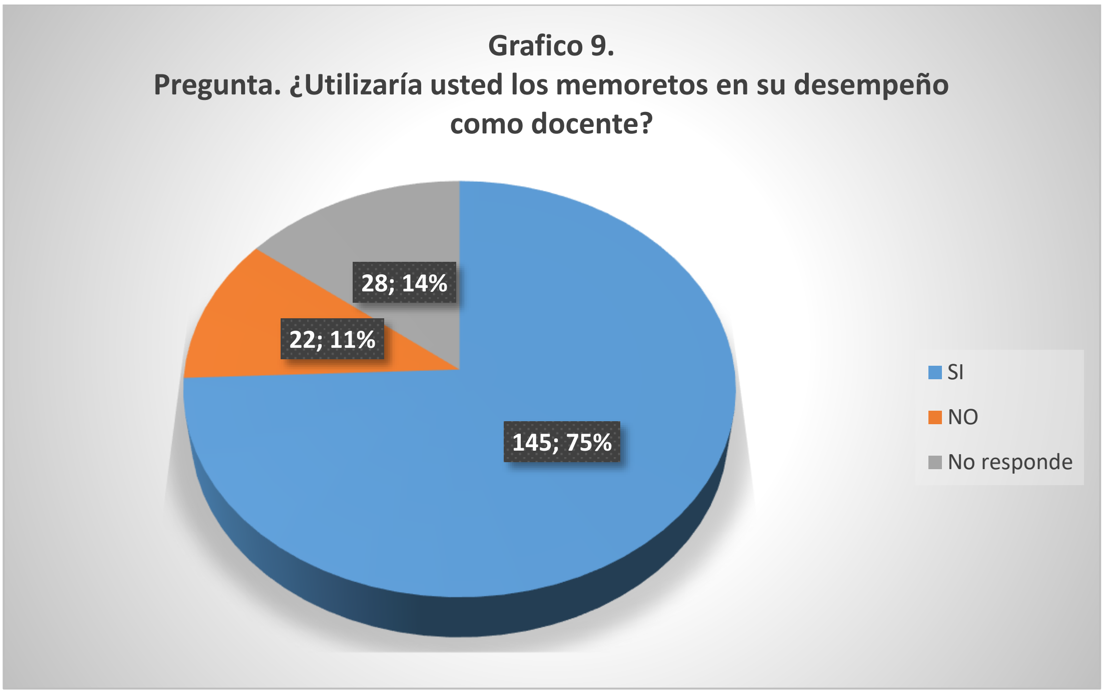


Las respuestas de esta pregunta con respecto al nivel del desempeño nos permiten construir el grafico 8.

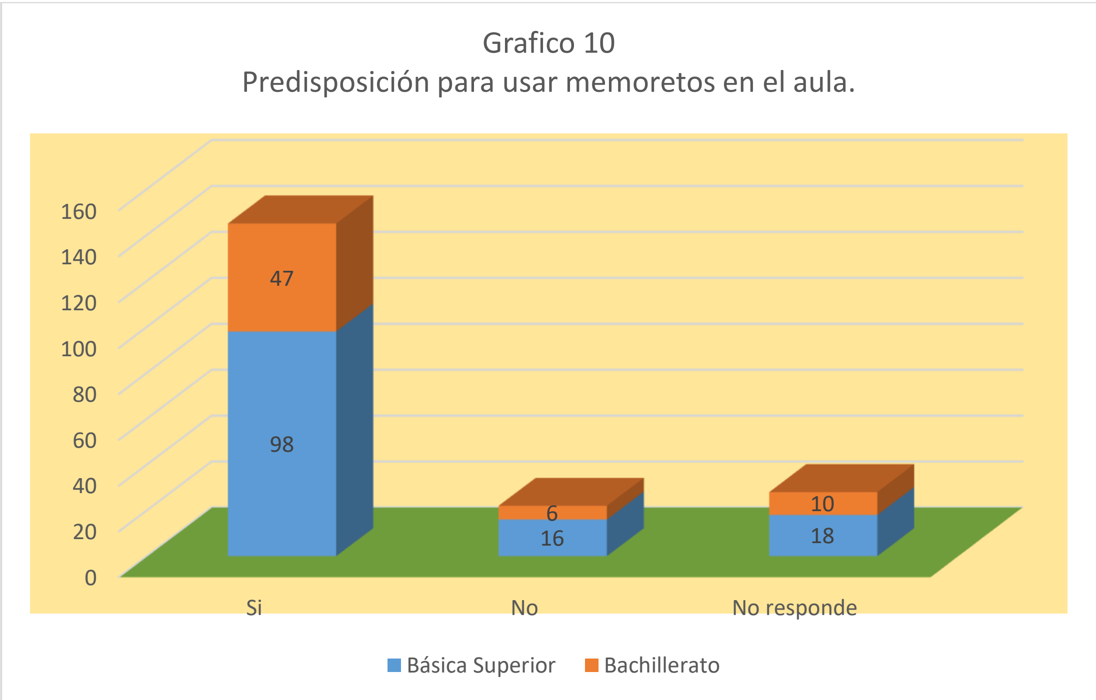


Las respuestas a esta pregunta son muy interesantes ya que validan este tipo de retos como herramientas para lograr los objetivos del currículo oficial donde se hace hincapié en los valores humanos sobre los contenidos. Los docentes de bachillerato se manifiestan mayoritariamente en este sentido, con una actitud distinta a la observada en las otras preguntas.

Con respecto a la quinta pregunta, el grafico 9 muestra la frecuencia de las respuestas.



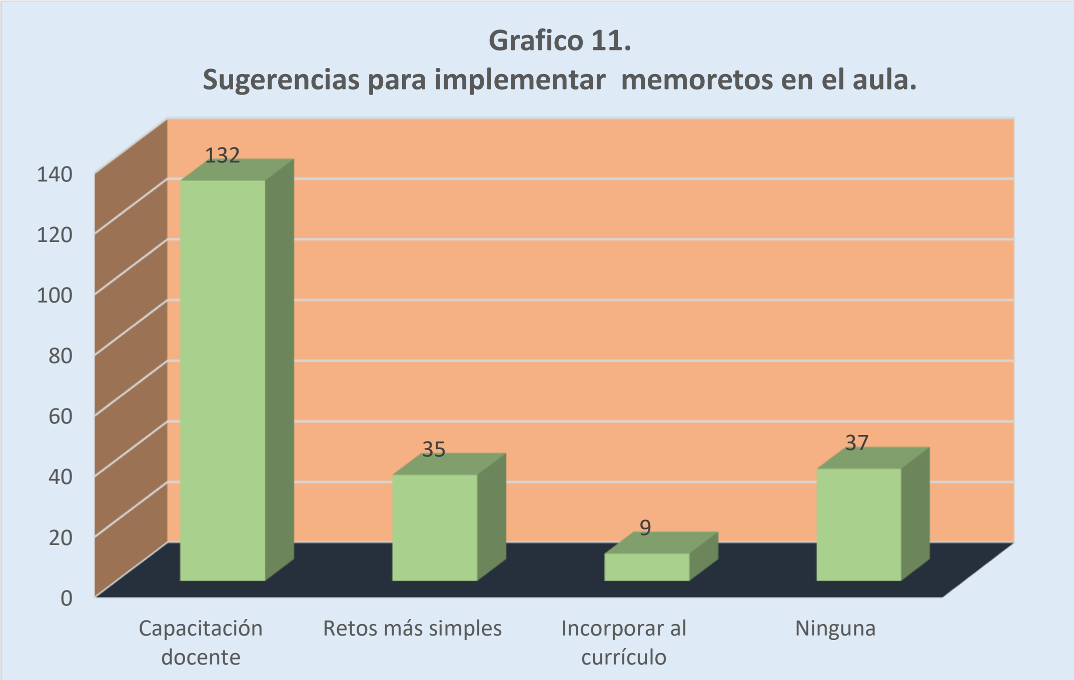
Con respecto al nivel de desempeño de los docentes, los resultados permiten construir el grafico 10.



Las respuestas de esta pregunta indican que los docentes si tienen la intención de incorporar este tipo de retos en su desempeño de aula, se nota algo más de resistencia en os docentes de básica superior.

Además existe una pregunta abierta donde se pide sugerencias para implementar estos retos en las actividades de los docentes, el grafico 11 muestra las frecuencias de las sugerencias planteadas.

Teniendo en cuenta que esta pregunta fue abierta, en algunos casos se anotó respuestas generales indicando que la propuesta es válida, otros presentaron sugerencias específicas, con esas respuestas construimos el grafico.



La sugerencia que más está presente es la que tiene que ver con capacitación.

Conclusiones generales de los resultados.

De los diálogos mantenidos con los docentes que participaron en los talleres han surgido algunas ideas que han enriquecido nuestra propuesta, validando esta metodología como una herramienta que facilita los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas

Luego del trabajo con los docentes, es posible plantearnos las siguientes conclusiones:

- El trabajo con este tipo de retos matemáticos si genera interés en los profesores y en los estudiantes del sistema educativo ecuatoriano.
- Estos retos ayudan a los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en sus diversas ramas, especialmente en la aritmética.
- El desarrollo de los procesos de pensamiento lógico puede ayudarse de este tipo de retos.
- Es necesario capacitar a los docentes con este tipo de herramientas a fin de que los pongan en práctica y mejoren sus procesos de enseñanza aprendizaje.
- Es posible desarrollar procesos innovadores en la enseñanza de matemáticas con recursos mínimos (papel y lápiz).
- Estos retos facilitan el desarrollo individual del conocimiento matemático.
- La innovación educativa es una actitud que debe caracterizar al docente-

Ponencias y talleres

Las propuestas y resultados de esta metodología fue presentada en formato de ponencia, conferencia o taller en varios eventos académicos nacionales e internacionales, logrando siempre reconocimiento de los participantes. Además se ha publicado un artículo al respecto en una revista de educación.

En formato de ponencia este trabajo se presentó en los siguientes eventos:

XV Encuentro de la Matemática y sus Aplicaciones, con la ponencia: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y DESTREZA NÚMERICA, realizado en Quito del 3 al 7 de octubre del 2016.

- V CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN Y APRENDIZAJE, desarrollado en Madrid, España, del 24 al 26 de noviembre del 2016 (ANEXO 2).

- Primer Encuentro Pedagógico SAN VICENTE, desarrollado en San Vicente el 13 de noviembre del 2018.
- Tercer Congreso Internacional de Educación, desarrollado los días 21, 22 y 23 de mayo en Chuquipata, Azogues.

Como taller desarrollado en un espacio académico en general, se ha presentado en los siguientes eventos:

- Primera fase del Programa de Formación estratégica a los docentes de IKIAM, con el área temática: Construcción del Pensamiento Numérico, desarrollado del 1 al 15 de agosto del 2016.
- IV Coloquio BINACIONAL COBISEMAT Sobre La Enseñanza De Matemática (IV Cobisemat), desarrollado en Cuenca, 20, 21 y 22 de marzo del 2019.
- IV Jornadas de Escuelas Innovadoras, desarrolladas los días 12,13 y 14 de noviembre del 2019, en Chuquipata.

Y como conferencia se ha presentado en los siguientes eventos:

- Simposio de Innovación Educativa UESFN 2019, 5 y 6 de abril del 2019
- Experiencias innovadoras en la educación matemática en la UNAE, desarrollada en las Primeras Jornadas Pedagógicas A-Fluir, en la parroquia Javier Loyola, del 9 al 11 de julio de 2019.

De estos eventos, surgió la propuesta de publicar esta metodología en un formato de libro a fin de poner al servicio de los docentes esta metodología como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Además ha sido aquí donde se ha ratificado que este enfoque permite presentar los contenidos matemáticos de una forma muy amigable.

También el articulo RETOS MATEMÁTICOS, UNA FORMA AMIGABLE DE ENTENDER ESTA CIENCIA, fue publicado en la edición N°1 Revista Mamakuna, de la UNAE, ISSN 1390-9940, en marzo de 2016. http://revistas.unae.edu.ec/index.php/mamakuna/article/view/17/11.

El Memoreto en medios de comunicación

A partir de Abril del 2014, el semanario El Heraldo de la ciudad de Azogues, fundado en 1965, en la persona de su director el Dr. Luis Carpio Amoroso, reservar un espacio una columna para que semanalmente se publique una solución al Memoreto planteado la edición anterior y un nuevo para la siguiente edición, además de la invitación para que quienes construyan una solución correcta, hagan llegar la misma mediante correo electrónico al autor de los retos, se acordó también, que en honor al padre del autor, esta columna se denominaría “EL MEMORETO”.

A partir de esa fecha y hasta la actualidad, semana a semana, con absoluta regularidad estos retos se han venido publicando, debiendo recalcar con hecho significativo que cuando este semanario paso a nuevos dueños, el Dr Bolivar Delgado y la Licenciada Martha Sanmartin, en su legítimo derecho reformularon los contenidos, comedidamente extendieron una comunicación indicando que esta columna se mantenía ya que ellos la consideraban de gran valía (ANEXO 3).

En este espacio se han publicado más de trescientos retos, todos ellos originales e inéditos, cumpliendo lo propuesto.

Con esto se ha logrado una comunicación directa con los docentes, particularmente con los de la provincia del Cañar, destacándose participaciones como la de Oscar Reyes, profesor de matemáticas de una unidad educativa de La Troncal, quien incorporo estos retos en sus clases de quinto de bachillerato, (ANEXO 4) brindando los espacios para que sus estudiantes lo desarrollen en aula y lo reflexionen en función de los contenidos curriculares.

De hecho ha habido manifestaciones de felicitación por la columna, más vale reconocer a la lealtad de los lectores quienes han permitido el reconocimiento de esta columna, espacio donde se debe reconocer a Romeo Buri Pacheco y Gerardo Gonzales, quienes constantemente han participado haciéndonos llegar sus respuestas correcta a estos retos.

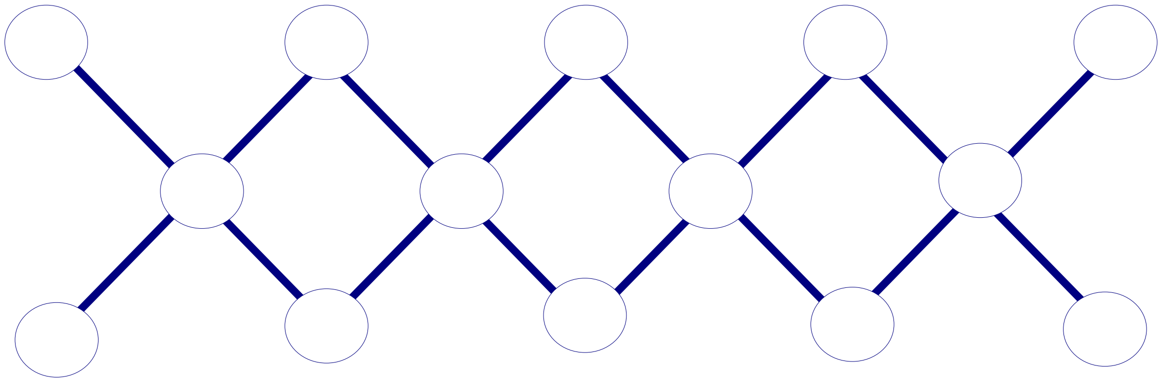
El diario digital EcuadorUniversitario.com, apoyo también con la difusión de estos retos, entre junio del 2016 y marzo del 2018, este espacio se logró la participación de docentes y estudiantes universitarios nacionales e internacionales.

CAPITULO VI.

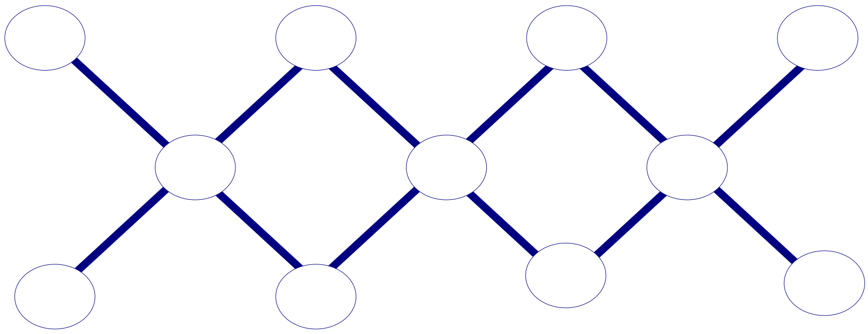
MEMORETOS Y SOLUCIONES

Presentamos aquí algunos memoretos identificados con un número.

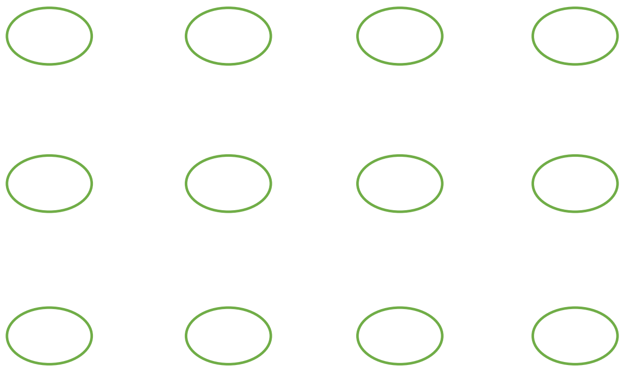
Memoreto 1. En la figura que se presenta se tienen 8 líneas inclinadas, en cada una de ellas existen tres espacios donde se han ubicado círculos, se pide colocar allí, números pares, de 10 al 36, es decir los catorce pares consecutivos, de tal forma que la sumas de los ubicados en cada una de las rectas sea una constante.



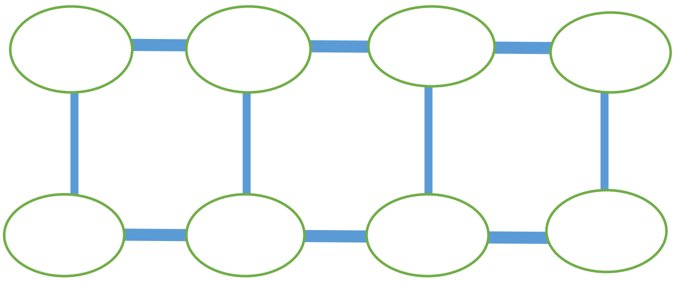
Memoreto 2. Se tienen 6 líneas inclinadas, en cada una de ellas existen tres espacios donde se han ubicado círculos, se pide colocar allí, números impares del 11 al 25, es decir once impares consecutivos a partir del 11, de tal forma que la sumas de los ubicados en cada una de las rectas sea una constante.



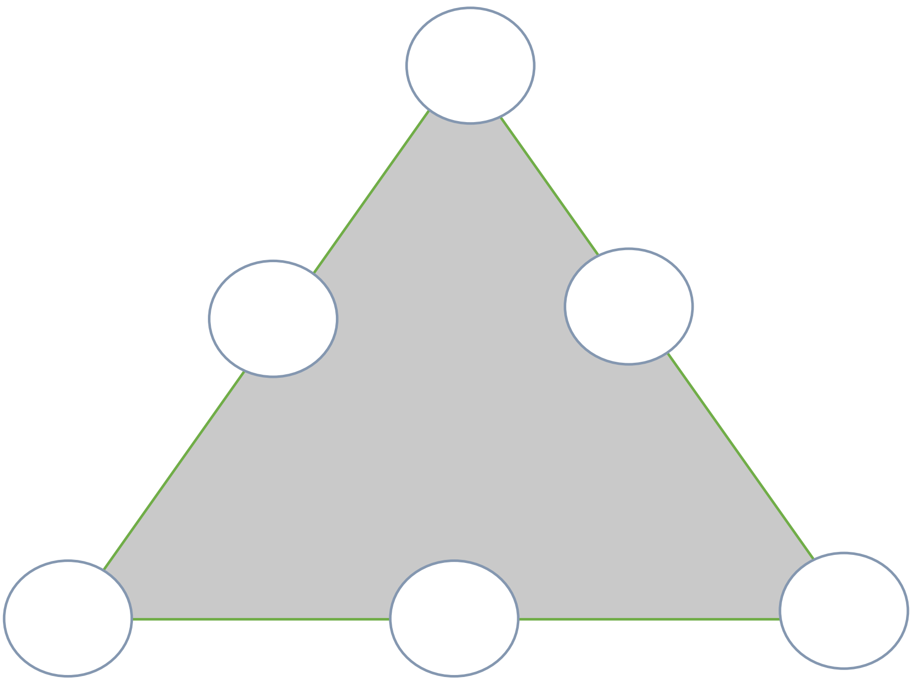
Memoreto 3. Planteamos que se ubiquen números impares, del 21 al 43, sin repetición de forma que los que están en las esquinas de cada uno de los 8 rectángulos, sumen un valor constante:



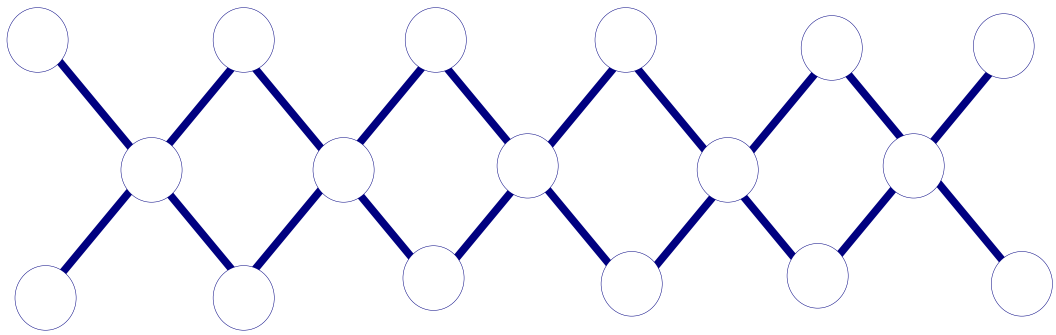
Memoreto 4. En virtud de lo anterior, presentamos un memoreto similar aunque de menor complejidad, lo que se pide es ubicar los números, del 1 al 8, distintos en cada elipse, de forma que la suma de los que se ubican en las esquinas de cada rectángulo, así como los cuatro que se ubican en cada línea horizontal, los cuatro de las esquinas extremas y los cuatro de los centros, todas estos siempre sumen un valor constante.



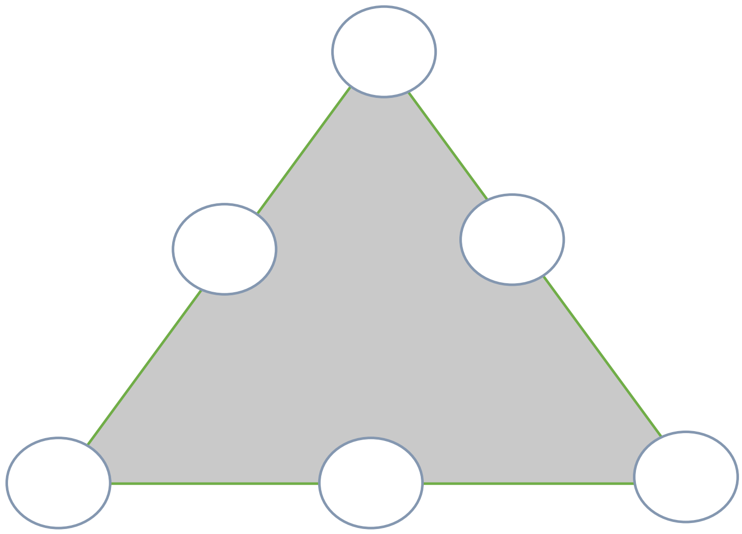
Memoreto 5. Ubicar en los círculos enteros positivos distintos cualesquiera, de forma que los productos de los tres de cada una de los lados del triángulo, dé como resultado un valor constante:



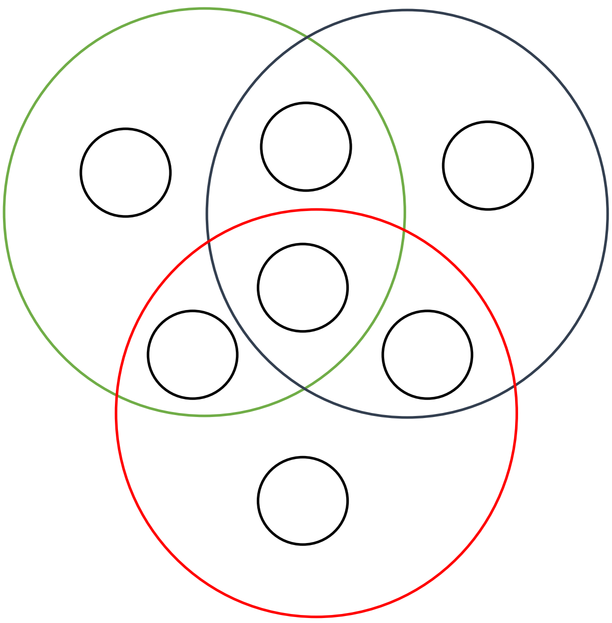
Memoreto 6. Colocar en cada círculo, números del 1 al 17, de tal forma que la suma en cada fila sea una constante.



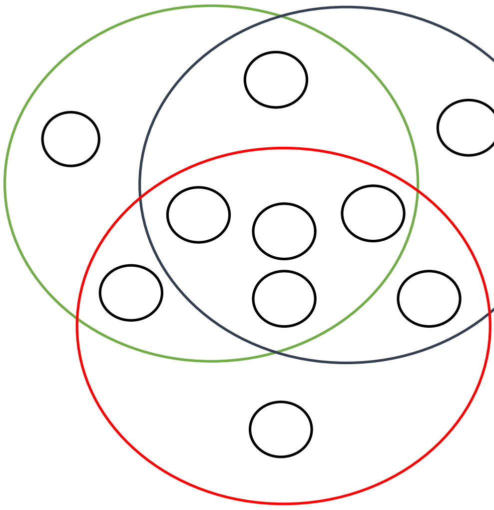
Memoreto 7. Ubicar en los círculos enteros positivos distintos cualesquiera, de forma que los productos de los tres de cada una de los lados del triángulo, dé como resultado un valor constante:



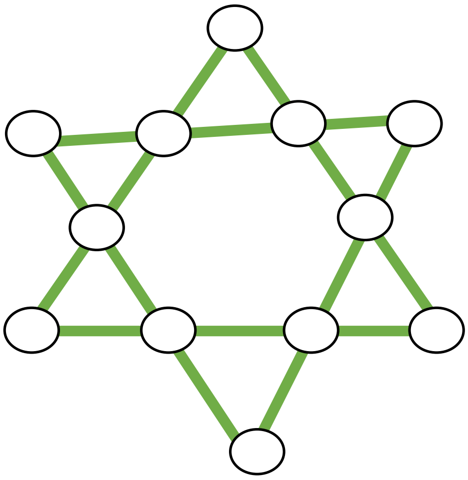
Memoreto 8. Se pide que en los círculos pequeños se ubiquen números enteros menores a 11, de forma que el producto de los que se ubiquen dentro de los círculos grandes proporcione un resultado constante:



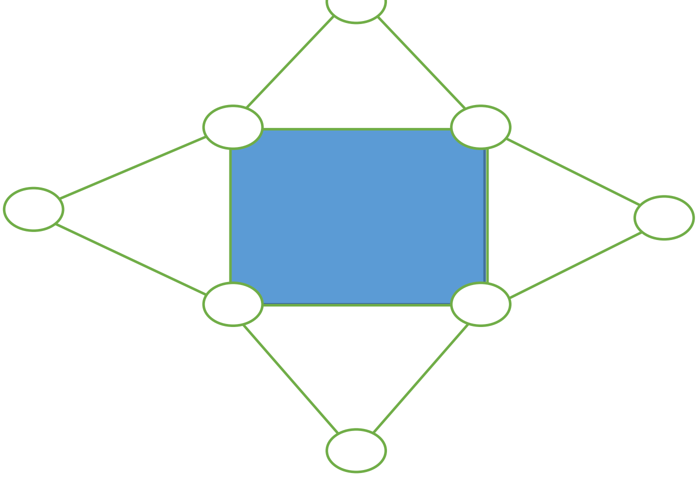
Memoreto 9. En el esquema siguiente, se pide que en los círculos pequeños se ubiquen números enteros menores a 11, de forma que el producto de todos los que se encuentren dentro de los círculos grandes proporcione un resultado constante:



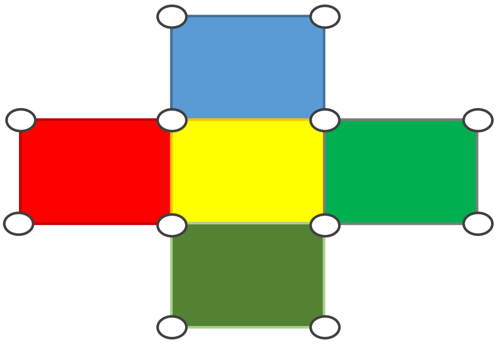
Memoreto 10. Presentamos la figura, donde se forman 6 triángulos pequeños cuyos vértices son: un vértice de la estrella y los dos puntos medios del lado más próximo a este, e igual pedimos distribuir en los círculos, los números del 1 al 12 sin repetir, de forma que la suma de los vértices de esos triángulos pequeños sea una constante.



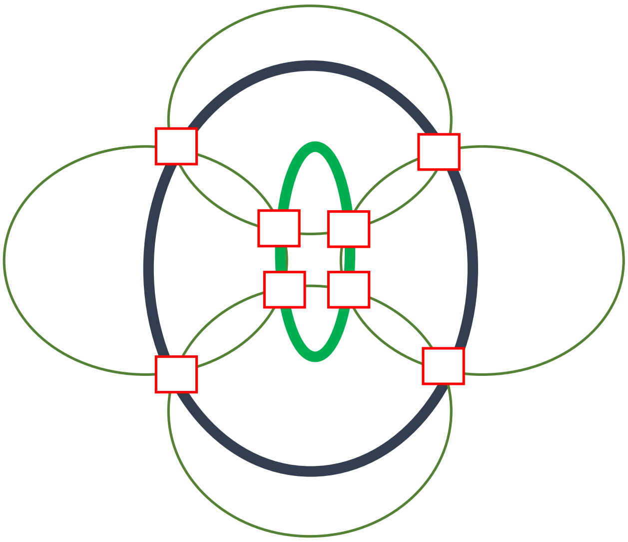
Memoreto 11. Presentamos un figura compuesta por un cuadrado y cuatro triángulos levantados en cada uno de los lados de ese cuadrado, se pide ubicar en cada uno de los ocho vértices que se forman, números del 1 al 8, de forma que si sumamos los que pertenecen a cada triangulo el resultado es una constante.



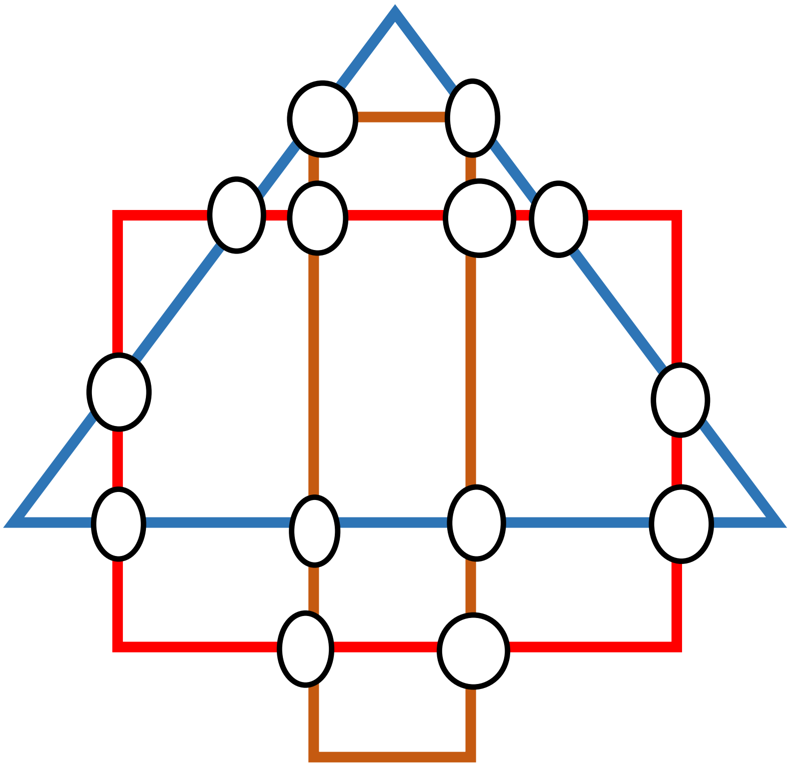
Memoreto 12. **P**edimos en cada uno de los 12 círculos del grafico siguiente, ubicar los múltiplos del 3, del 3 al 36, de forma que si se suman los 4 que constituyen vértices de cada uno de los cuadrados formados, el resultado sea una constante.



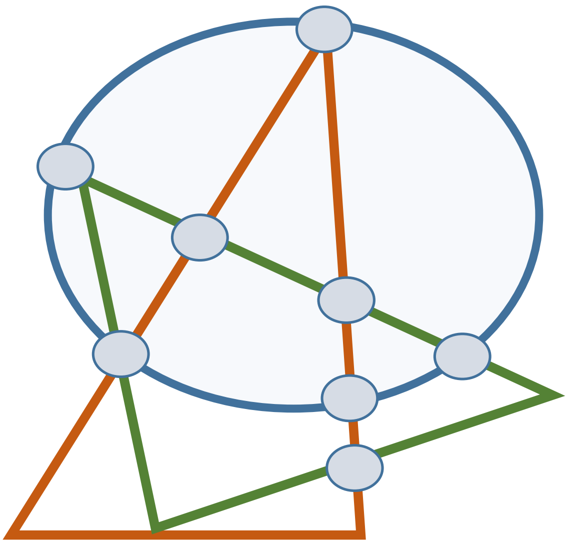
Memoreto 13. En la figura se tiene 4 círculos y dos elipses, se pide colocar números del 1 al 8 en los cuadrados que se han ubicado en las intersecciones, de forma que los que forman parte de cada uno de los círculos o de las elipses sumen un valor constante.



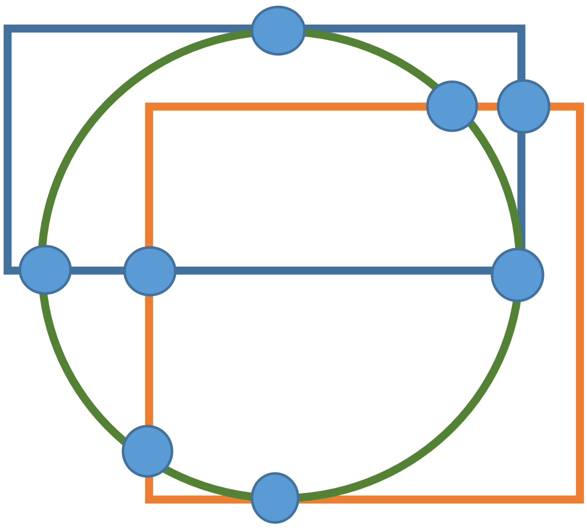
Memoreto 14. Se han dibujado un triángulo y dos rectángulos, tal como se observa en la figura, generando catorce puntos de corte, se pide ubicar en cada corte un número entero entre uno y catorce, de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo



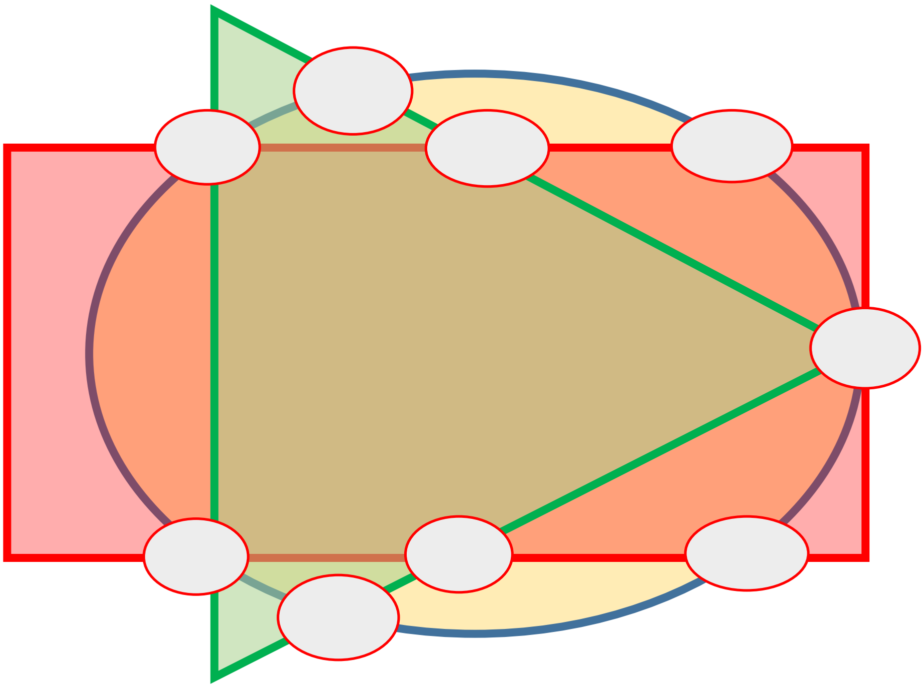
Memoreto 15. Se han graficado dos triángulos y un círculo, como se indica en la figura, generando 8 puntos de corte, se pide ubicar en cada corte un número del 1 al 8, sin repetición, de tal forma que al sumar los que se ubican sobre cualquiera de las tres figuras, el resultado sea un mismo valor.



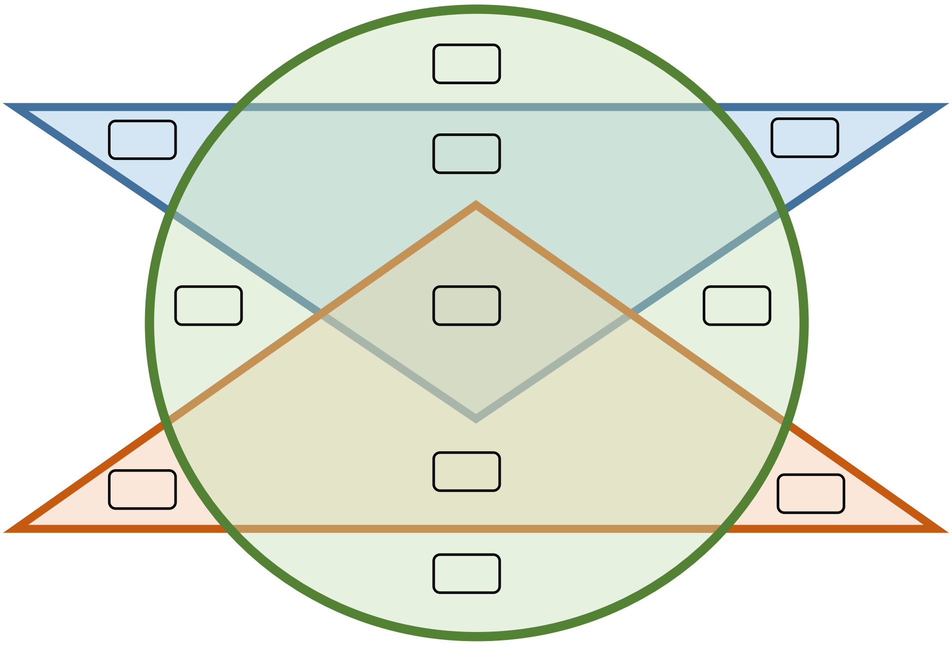
Memoreto 16. Se han trazado dos rectángulos y un círculo, tal como se observa en la figura, generando 8 puntos de corte, se pide ubicar allí los 8 primeros múltiplos de 5, de forma que al sumar los ubicados sobre cualquiera de las figuras, el resultado es el mismo.



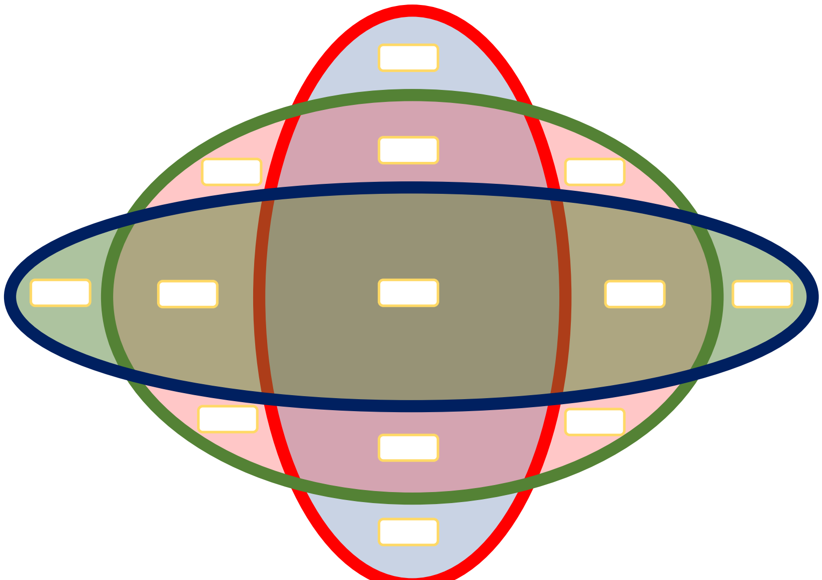
Memoreto 17. Se han dibujado un rectángulo, un circulo y un triángulo, tal como se observa en a figura, generándose 9 puntos de corte, se pide ubicar en esos cortes, los nueve primeros números enteros, de tal forma, que si sumamos los que se ubican en cualquiera de las tres figuras geométricas , el resultado sea el mismo.



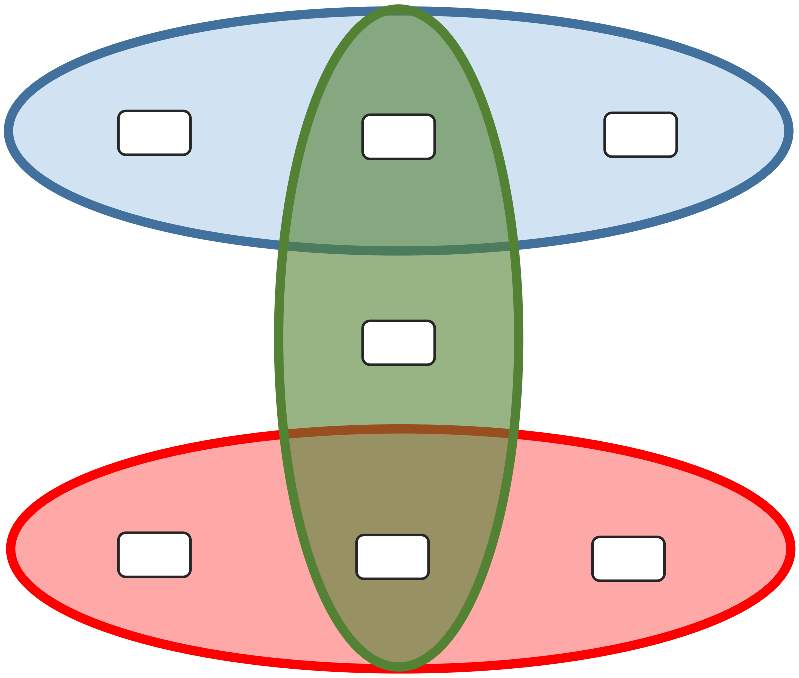
Memoreto 18. Se han dibujado dos triángulos y un círculo, como se indica la figura, generando 11 regiones, se pide ubicar en estas, sin repetición, los números enteros del 1 al 11, de tal forma que si sumamos las que forman cada uno de las figuras geométricas, el resultado sea un mismo valor.



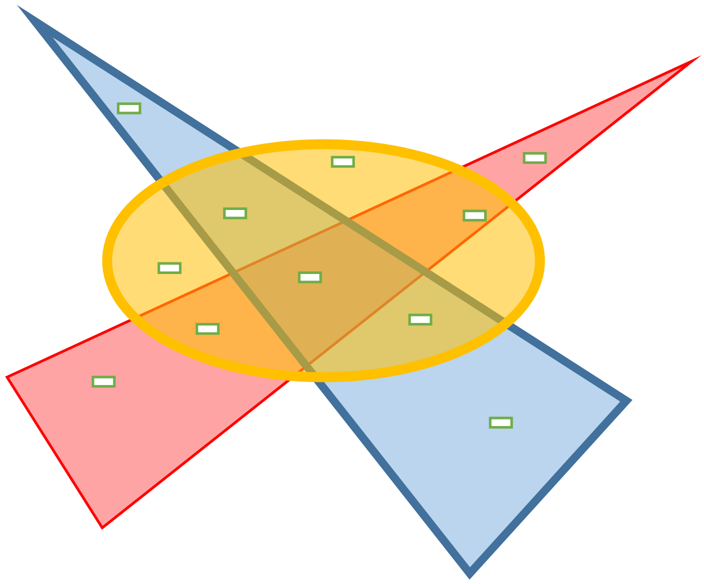
Memoreto 19. Se han dibujado dos elipses y un círculo, tal como se observa en la figura, generando 13 regiones distintas. Utilizando los números enteros del 1 al 13, se pide ubicar uno diferente en cada una de las regiones, de tal forma que si se suman los que están dentro de cualquiera de las regiones, el resultado debe ser el mismo.



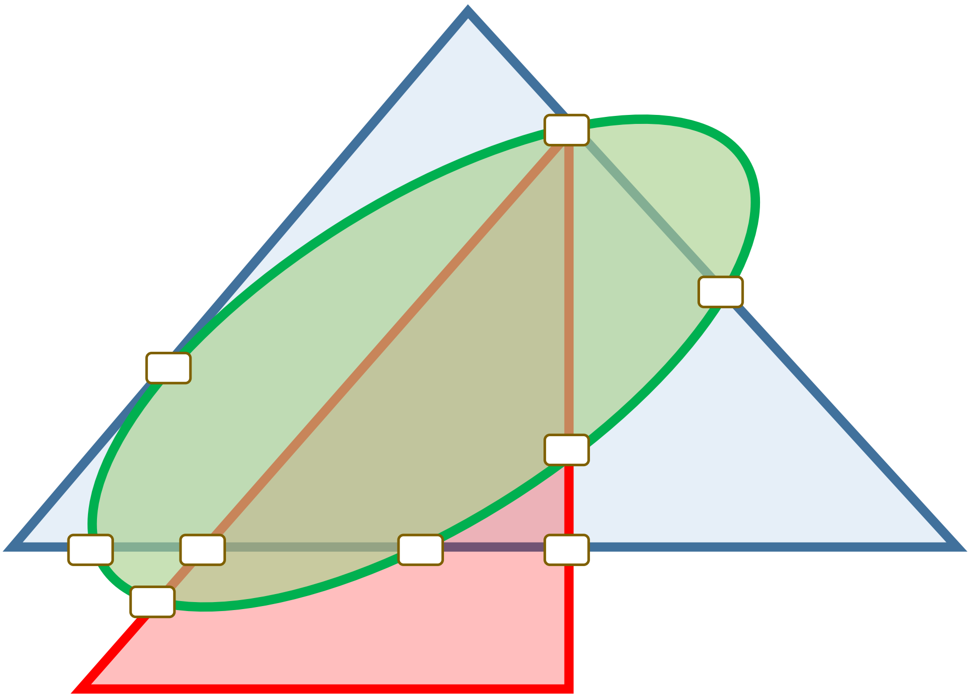
Memoreto 20. Se han dibujado tres elipses, tal como se observa en la figura, generando 7 regiones distintas. Utilizando los números enteros menores a 20, se pide ubicar uno diferente en cada una de las regiones, de tal forma que si se multiplica los que están dentro de cualquiera de las regiones, el resultado debe ser el mismo.



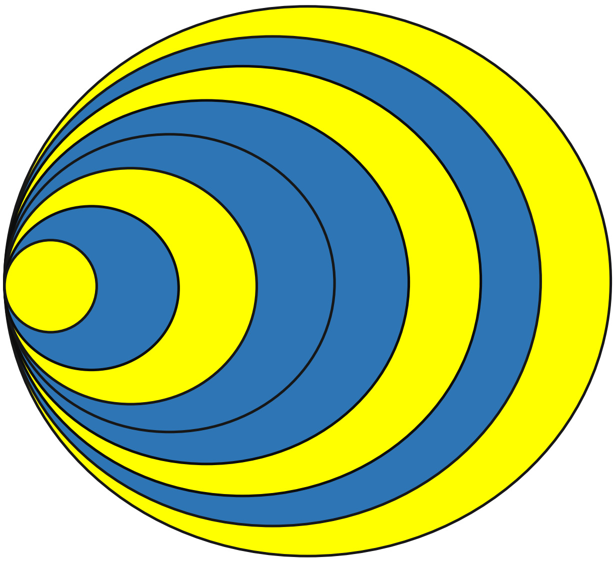
Memoreto 21. Se han dibujado dos triángulos y un círculo, tal como se observa en la figura, generando 11 regiones distintas. Utilizando los números enteros del 1 al 11, se pide ubicar uno diferente en cada una de las regiones, de tal forma que si se suman los que están dentro de cualquiera de las regiones, el resultado debe ser el mismo.



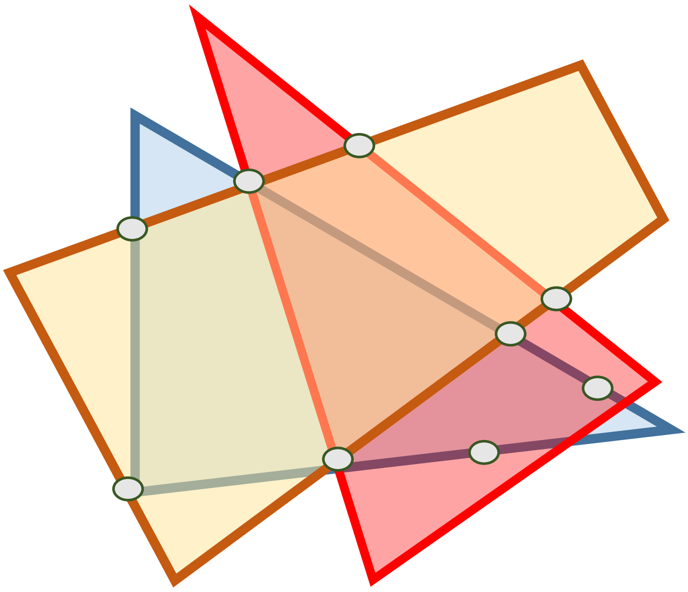
Memoreto 22. Se han dibujado dos triángulos y una elipse, tal como se observa en la figura, generando 9 puntos de corte. Utilizando los números enteros del 1 al 9, se pide ubicar uno diferente en cada una de los cortes, de tal forma que si se suman los que están dentro de cualquiera de las regiones, el resultado debe ser el mismo.



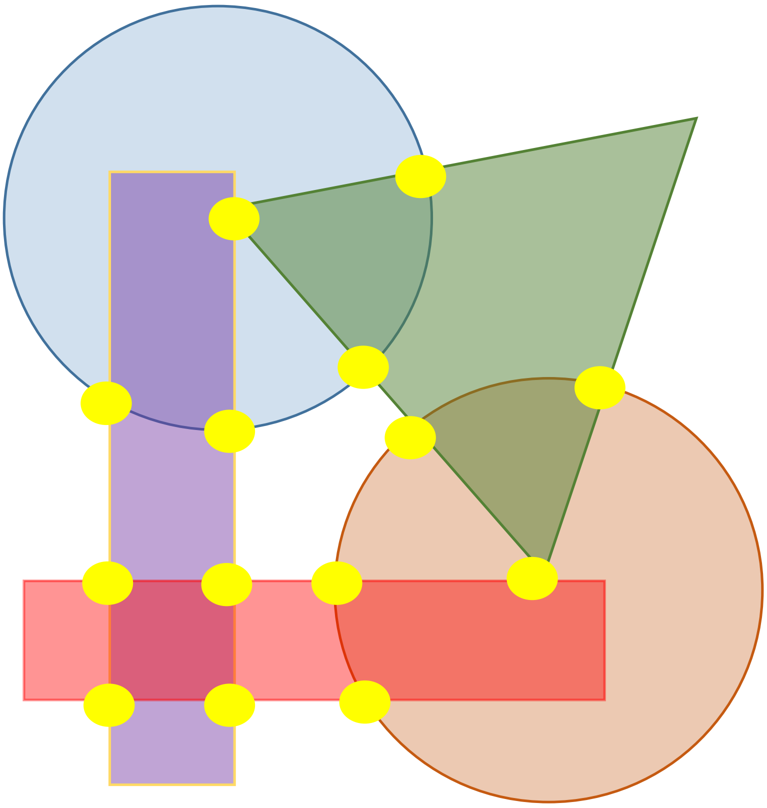
Memoreto 23. En el siguiente gráfico, se conoce que los círculos graficados son de 1U, 2U, 3U, 4U, 5U, 6U, 7U y 8U respectivamente, se pide calcular la razón entre el área de las zonas claras y el área de las zonas obscuras.



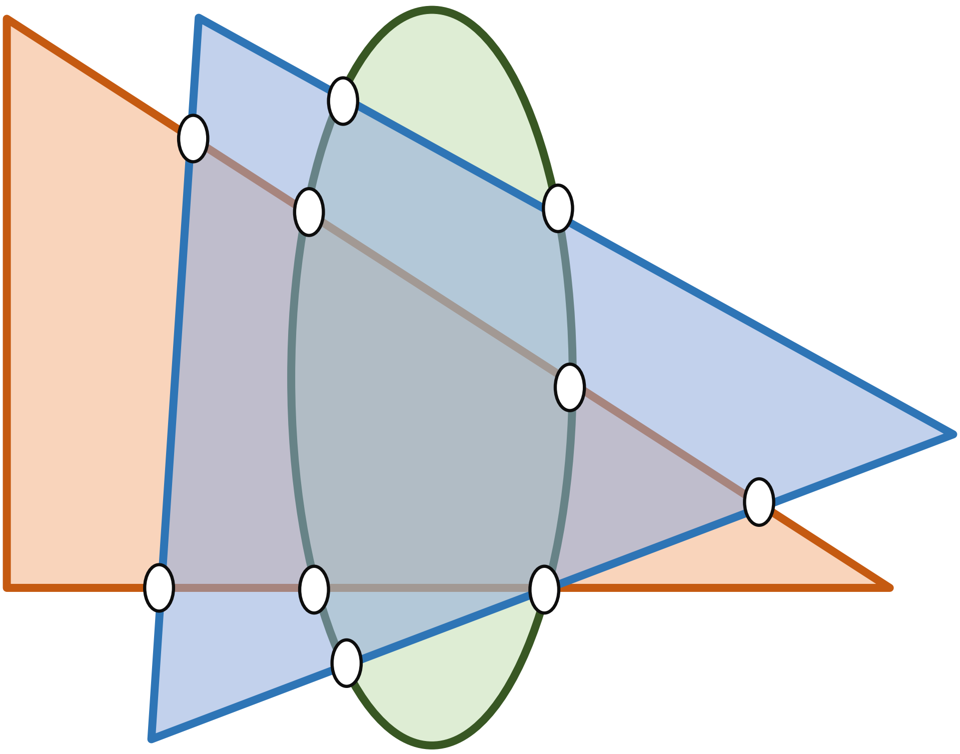
Memoreto 24. Se han trazado dos triángulos y un cuadrilátero, tal como se observa en la figura, generando 9 puntos de corte, se pide ubicar allí los 9 primeros números pares, de forma que si se suman los que están en el contorno de cualquiera de las tres figuras geométricas, el resultado sea el mismo.



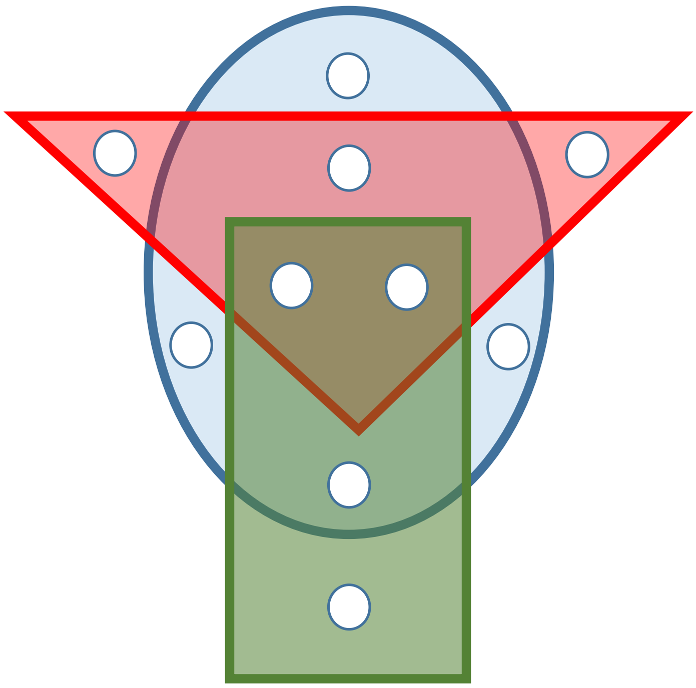
Memoreto 25. Cumpliendo con lo solicitado por mi amigo Santiago Romero, planteo lo siguiente, Se han dibujado dos círculos, dos rectángulos y un triángulo tal como se observa en la figura, generando catorce puntos de intersección, se pide ubicar allí, números enteros múltiples de tres, iniciando en tres de forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cada figura, el resultado es el mismo.



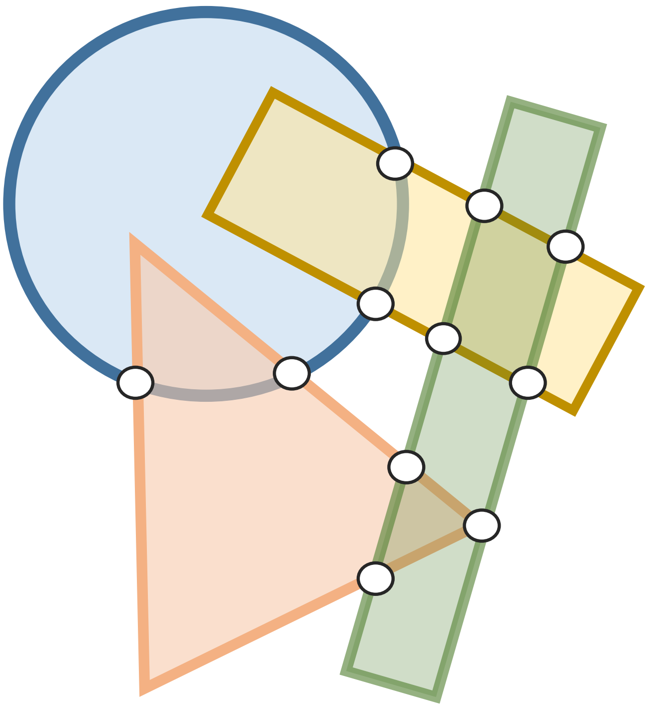
Memoreto 26. Se han dibujado dos triángulos y una elipse, tal como se observa en la figura, generando diez puntos de intersección. Se pide ubicar en esas intersecciones números enteros del 1 al diez, sin repetición. De forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.



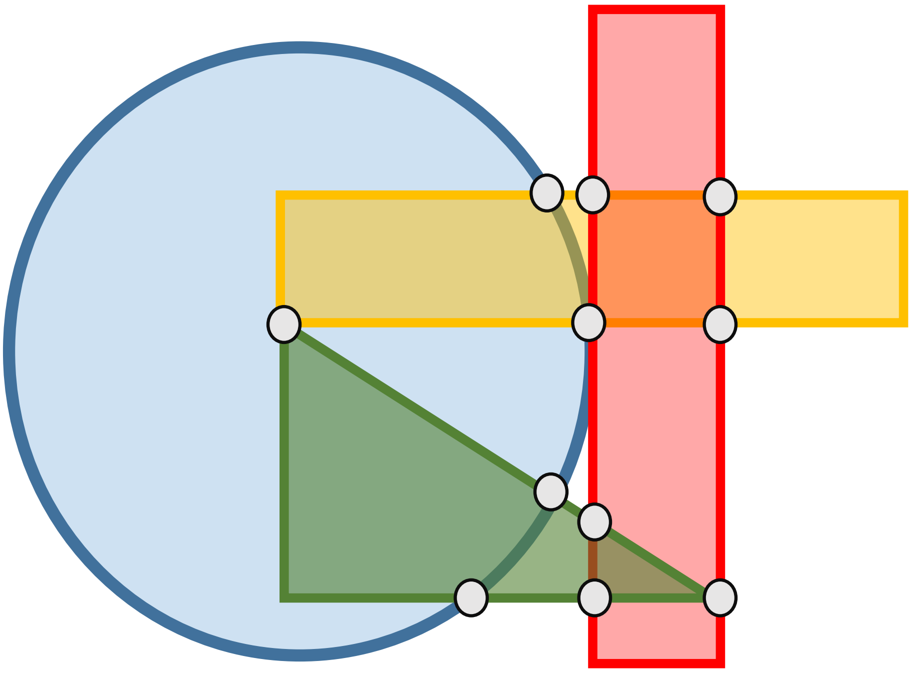
Memoreto 27. Se han dibujado un círculo, un triángulo y un rectángulo, generando 9 regiones distintas, se pide ubicar en esas zonas los números del 1 al 10 en los espacios que se han establecido en la figura que se presenta, de tal forma que al sumar los que se encuentran dentro de cualquier figura, el resultado sea el mismo.



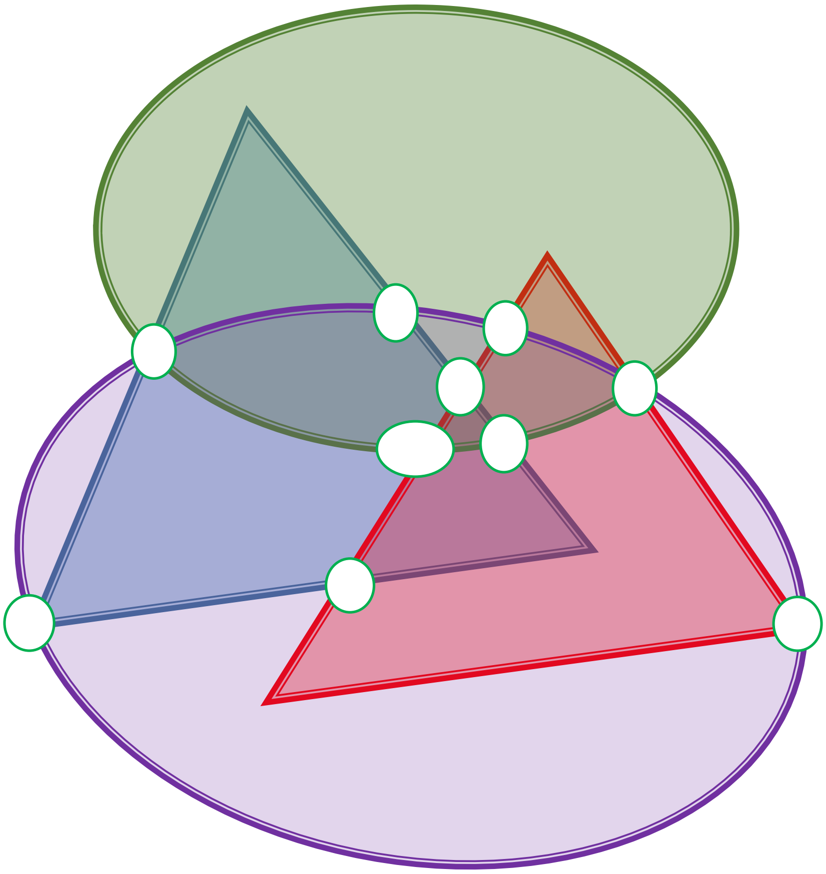
Memoreto 28 Se han dibujado dos rectángulos, un círculo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando once puntos de intersección. Se pide ubicar en esas intersecciones números pares del 2 al 22, sin repetición. De forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.



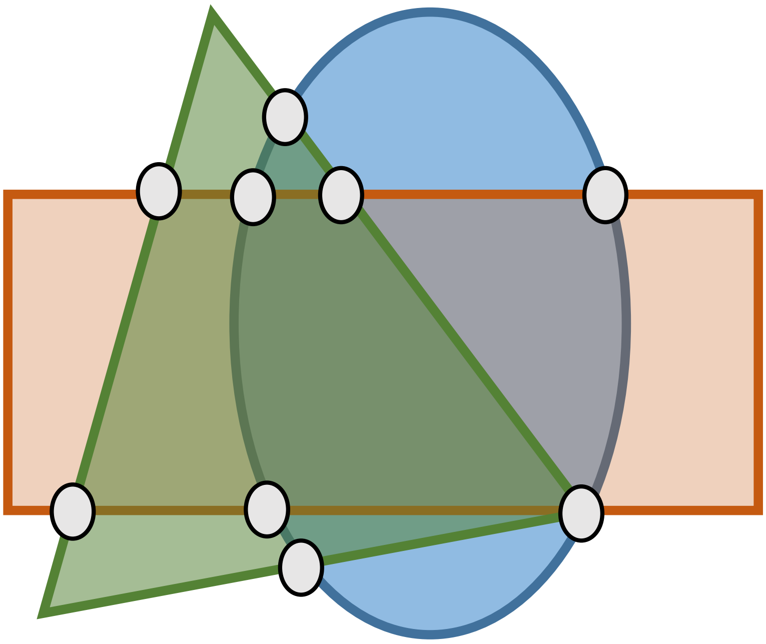
Memoreto 29. Se han dibujado dos rectángulos, un círculo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando once puntos de intersección. Se pide ubicar en esas intersecciones números múltiples de 3, del 3 al 33 sin repetición. De forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.



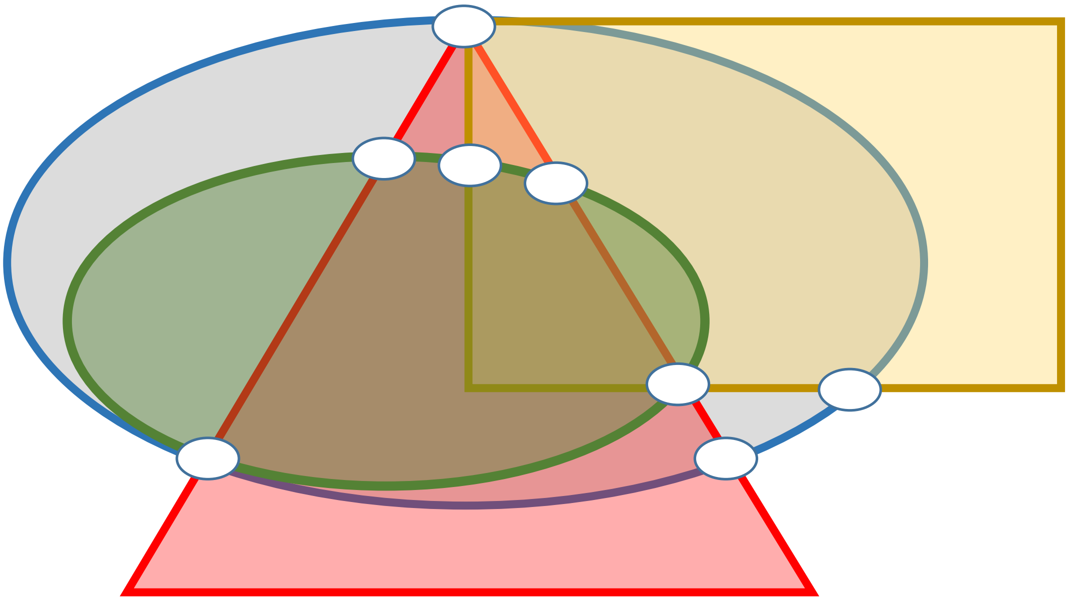
Memoreto 30. Se han dibujado dos elipses y dos triángulos, tal como se observa en la figura, generando diez puntos de intersección. Se pide ubicar en esas intersecciones números múltiples de 4, del 4 al 40 sin repetición. De forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.



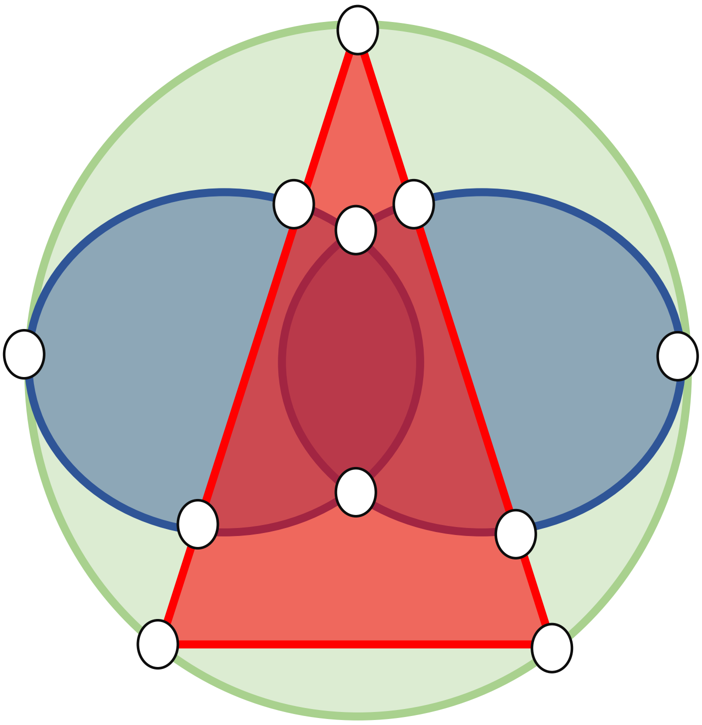
Memoreto 31. Se han un rectángulo, una elipse y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando nueve puntos de intersección. Se pide ubicar en esas intersecciones números múltiples de 4, del 4 al 36 sin repetición. De forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.



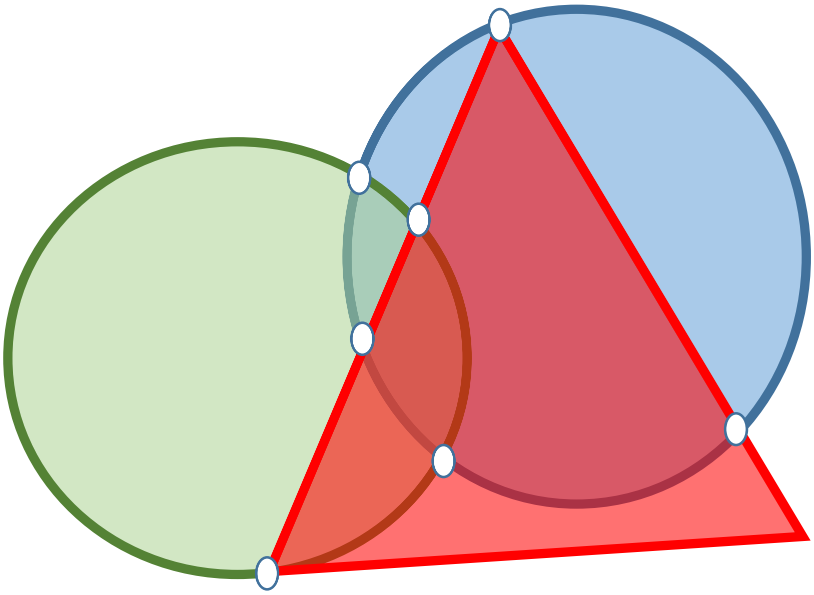
Memoreto 32. Se han dibujado dos elipses, un rectángulo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando 8 puntos de corte. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos, un número entero, del 1 al 8, de tal forma que al sumar lo que se ubican en el perímetro de cada figura, el resultado sea un mismo resultado.



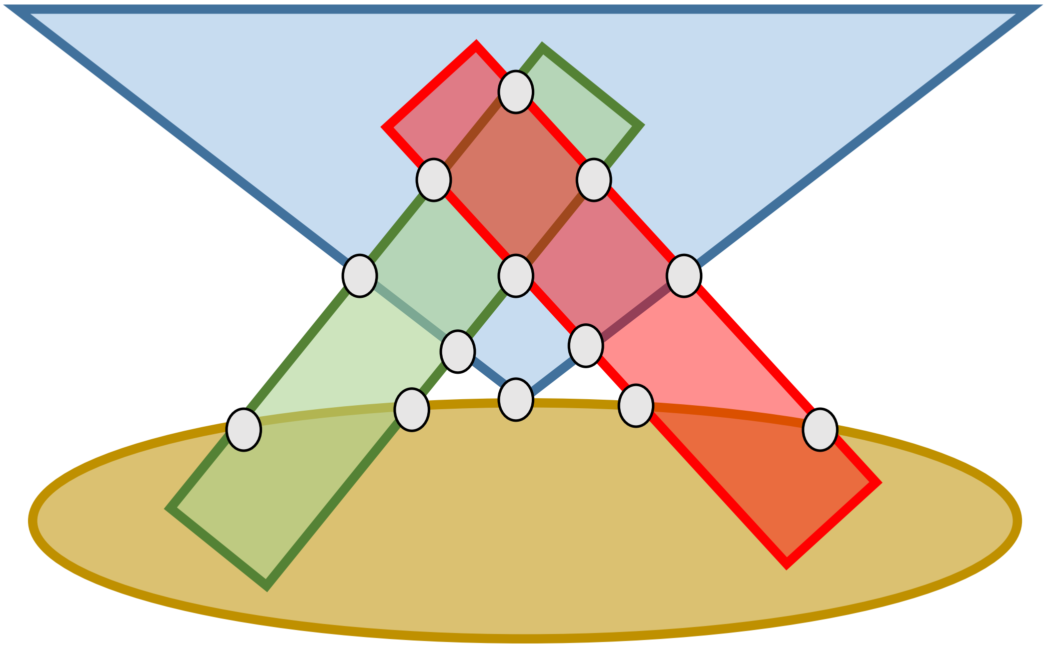
Memoreto 33. Se han dibujado un círculo, dos elipses y n triángulo, tal como se observa en la figura, generando 1 puntos de corte. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos, un número entero, del 1 al 11, de tal forma que al sumar lo que se ubican en el perímetro de cada figura, el resultado sea un mismo resultado.



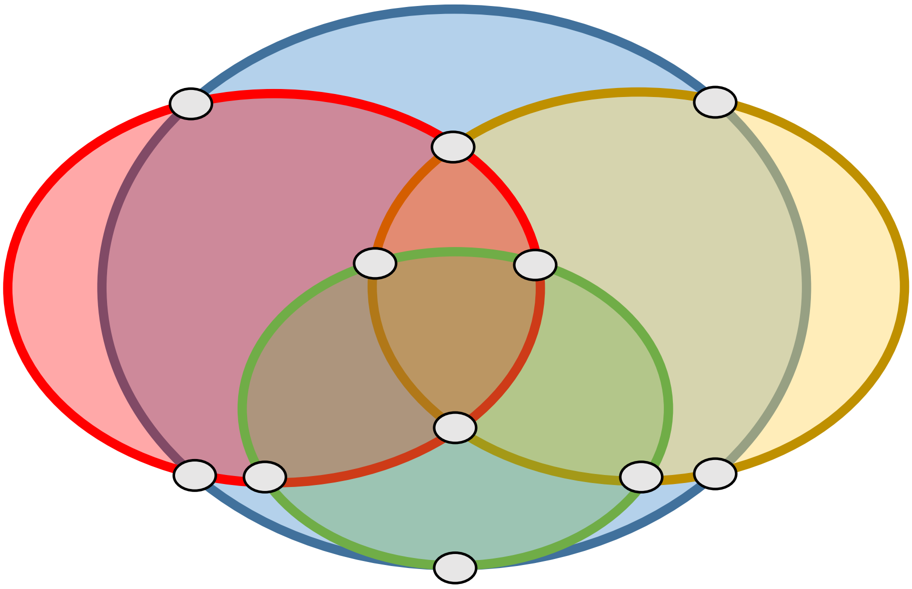
Memoreto 34. Se han dibujado 2 círculos y 1 triángulo, como se observa en la figura, generando 7 puntos de corte. Se pide ubicar en esos puntos de intersección, sin repetición, los números enteros múltiples de 3, del 9 al 27, de forma que al sumar los que se encuentran en cualquiera de las figuras el resultado sea un mismo valor.



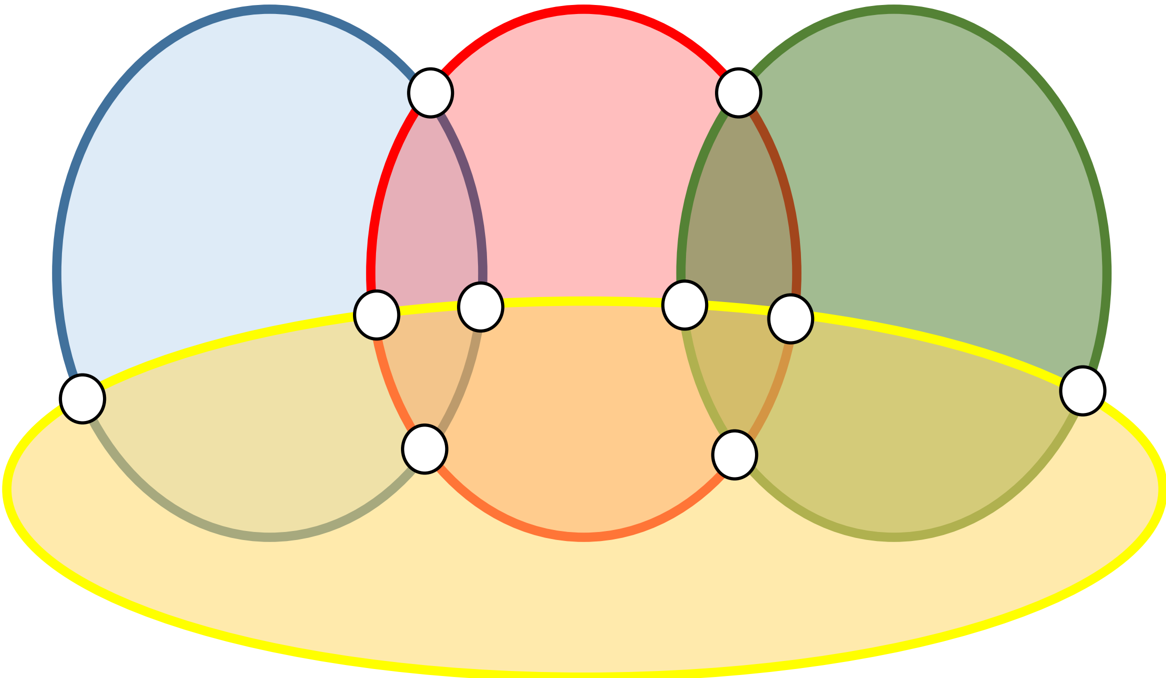
Memoreto 35. Se han dibujado un triángulo, una elipse y dos rectángulos, tal como se observa en la figura, generando trece puntos de corte. Se pide ubicar en esos puntos de corte los números enteros del dos al catorce, sin repetición, de tal forma que al sumar los que se ubican en el entorno de cualquier figura el resultado sea un mismo valor.



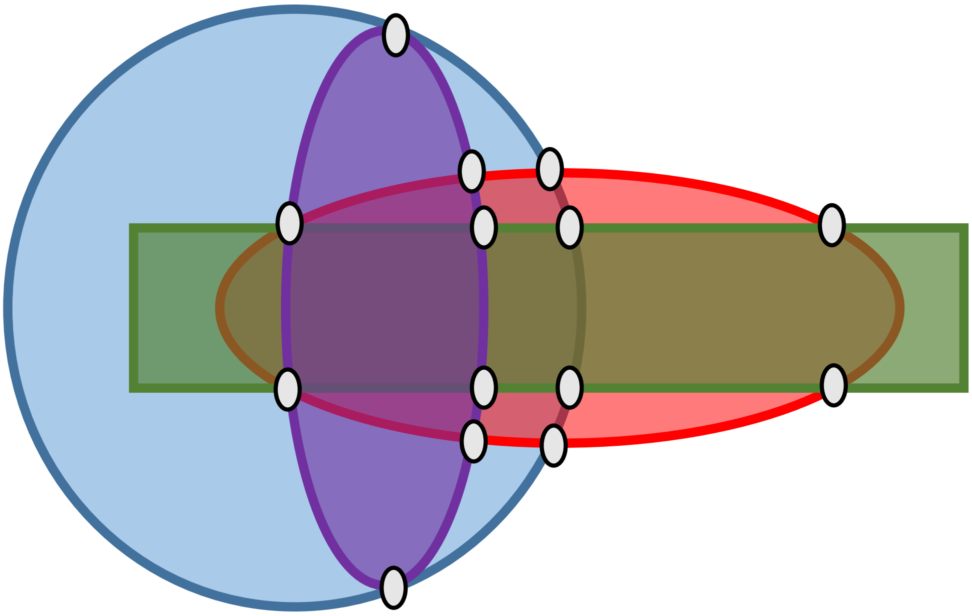
Memoreto 36. Se han dibujado cuatro círculos, como se muestra en la figura, generando once puntos de corte, se pide ubicar en cada uno de esos puntos un número múltiple de tres, desde el tres al treinta y tres, distinto de tal forma que al sumar los que se ubican en cada uno de los círculos, el resultado sea un mismo valor.



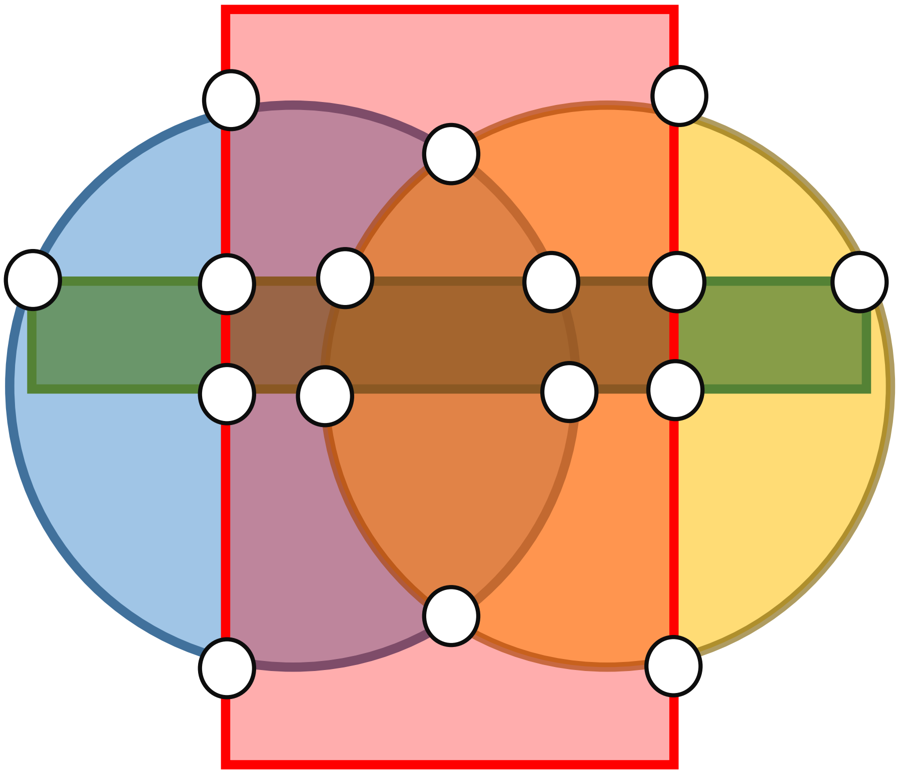
Memoreto 37. Se han dibujado tres círculos y una elipse, generando 10 puntos de corte. Utilizando los elementos del conjunto {-5, -4, -3, -2, -1, 1 ,2 ,3 ,4 ,5}, ubicarlos sin repetición, un elemento en cada intersección, de forma que al sumar los que se encuentran en el perímetro de cada figura, el resultado sea un mismo valor.



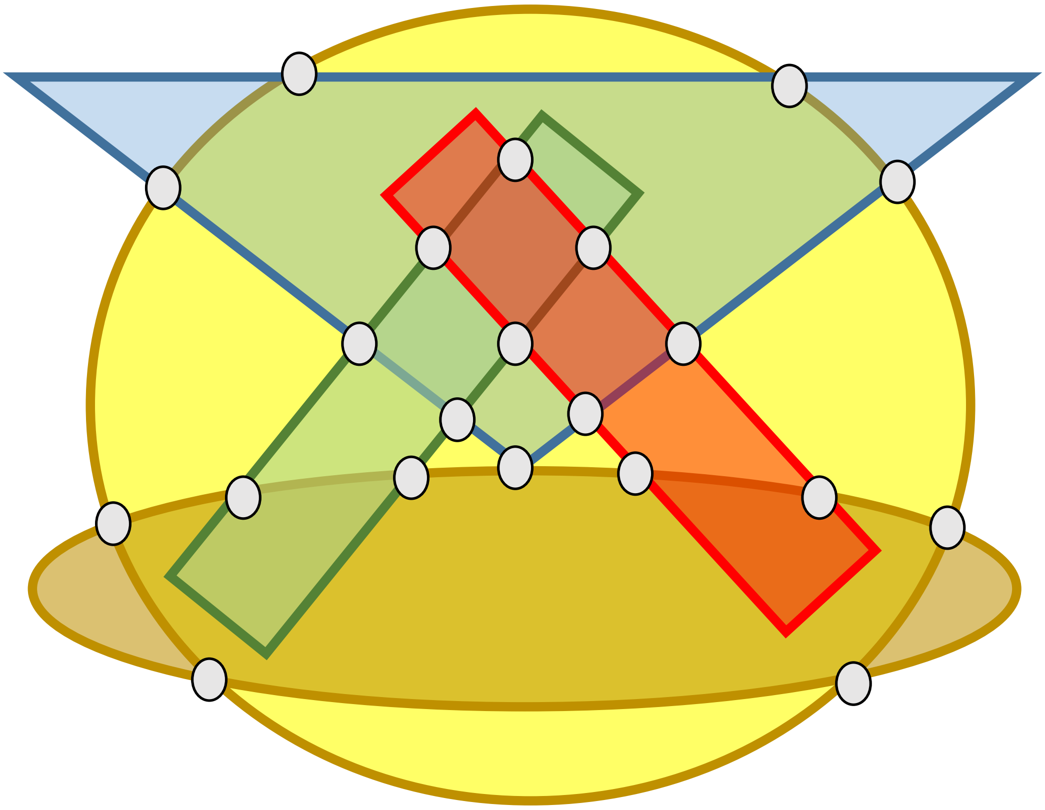
Memoreto 38 Se ha dibujado, un circulo, dos elipses y un rectangulo, tal como se presenta en la figura, generando catorce puntos de intersección, se pide ubicar en cada intersección un numero entero del 1 al 14, sin repetición, de forma que al sumar los que se encuentran en cualquier figura el resultado es un mismo valor.



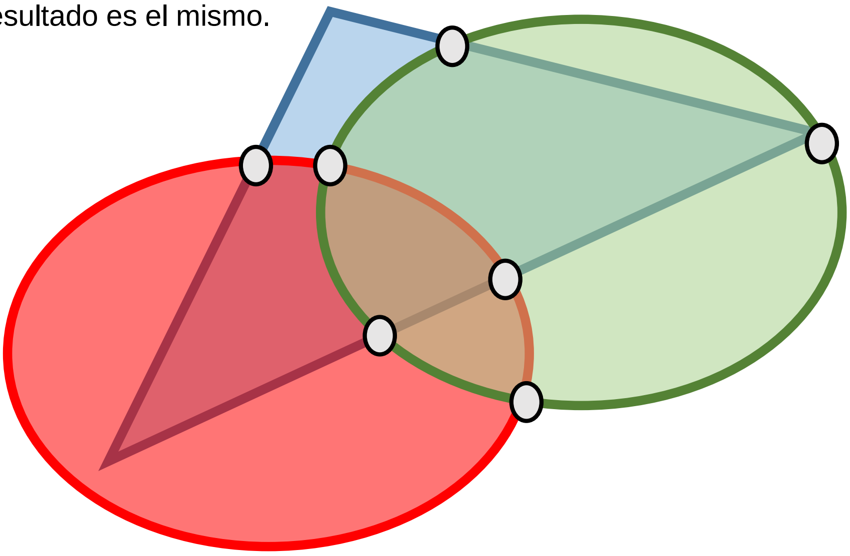
Memoreto 39. Se han dibujado dos rectángulos y dos círculos, generando dieciséis puntos de corte, se piden ubicar en eso cortes, los números enteros pares del dos al treinta y dos, de tal forma que al sumar los ubicados en cada figura, el resultado sea un mismo valor.



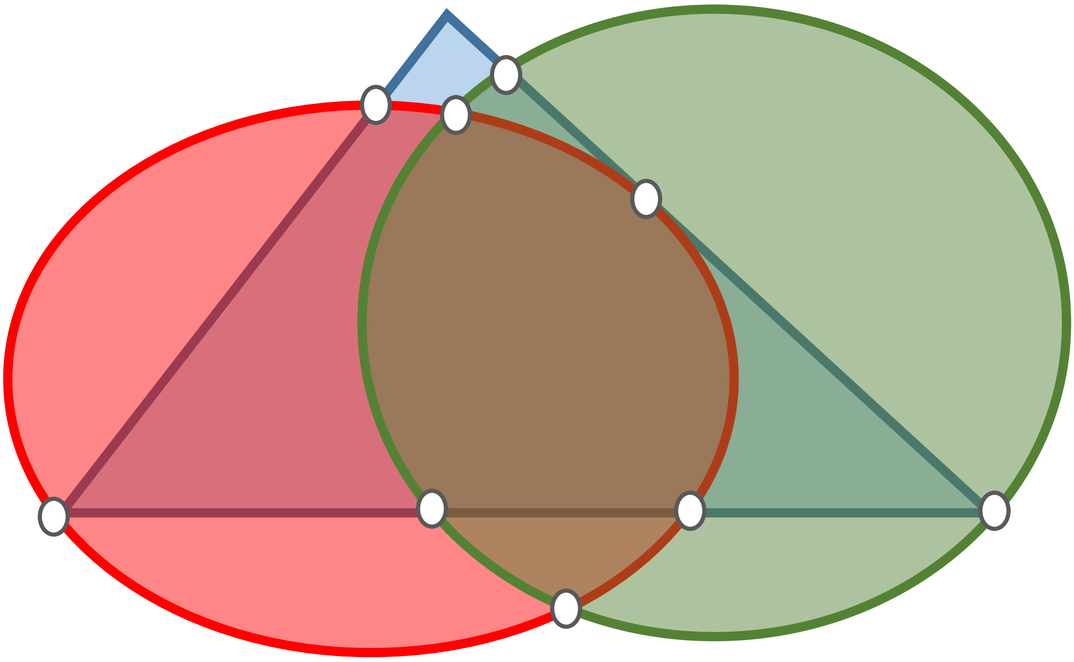
Memoreto 40. Se ha dibujado un triángulo dos rectángulos y una elipse, tal como se observa en la figura, generando veinte y un puntos de corte, se pide ubicar en eso cortes, los números enteros del uno al trece, de tal forma que al sumar los ubicados en cada figura, el resultado sea un mismo valor.



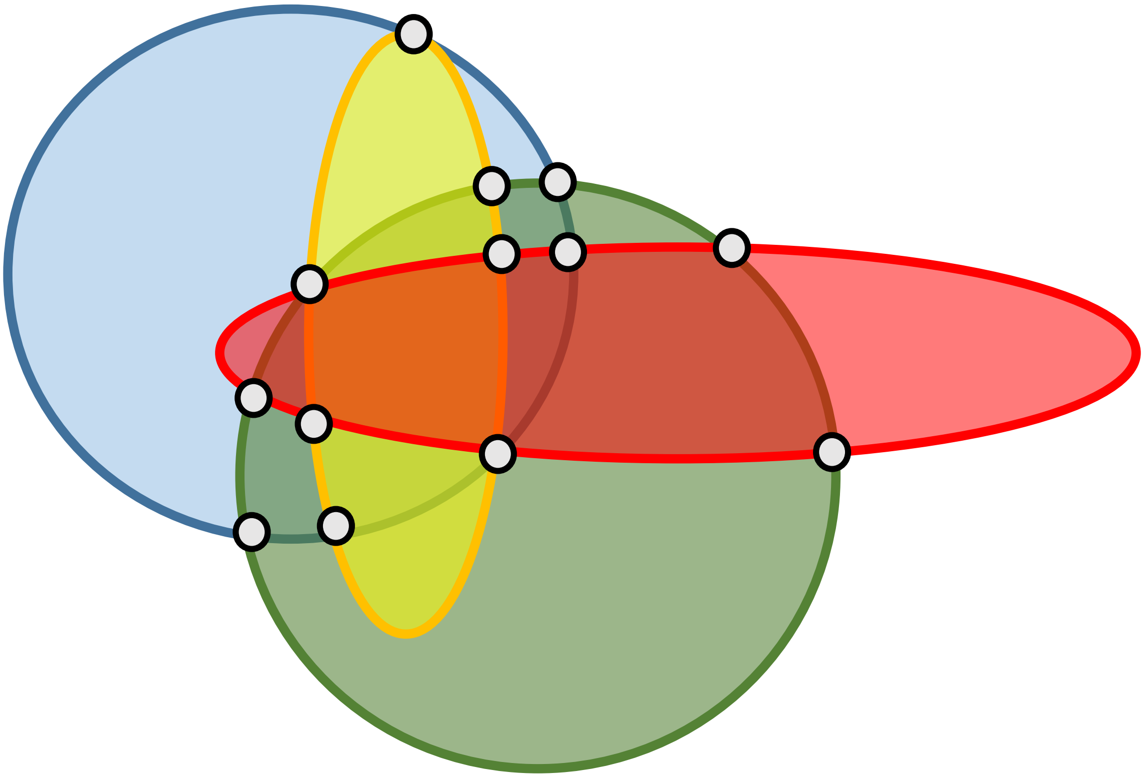
Memoreto 41. Se han dibujado dos elipses y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando siete puntos de corte. Se pide ubicar en esos puntos de corte, números enteros positivos sin repetición, del tres al nueve, de forma que al sumar los ubicados sobre cualquier figura el resultado es el mismo.



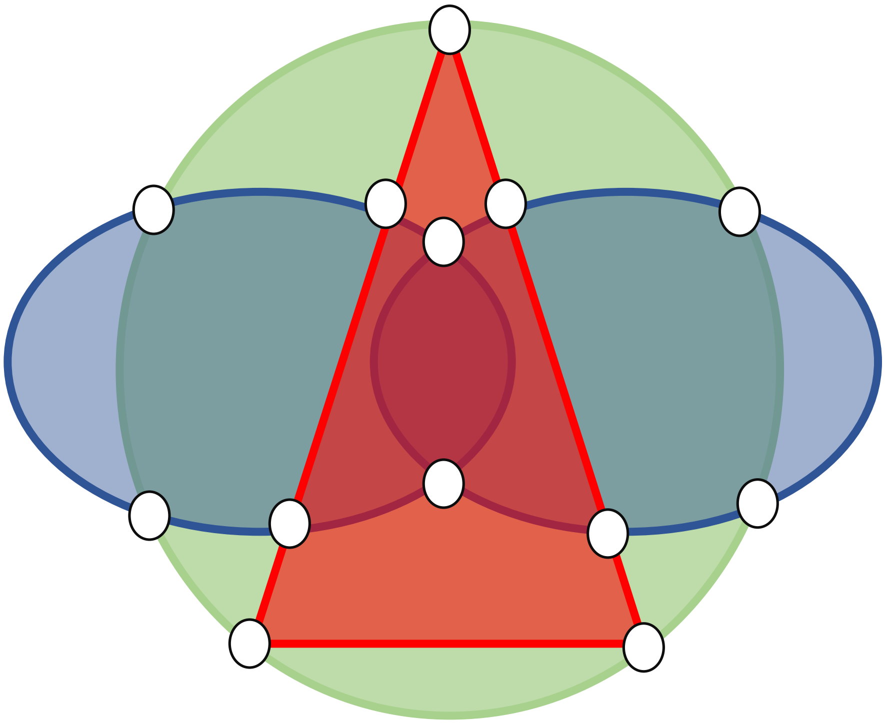
Memoreto 42. Se han dibujado dos elipses y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando nueve puntos de corte. Se pide ubicar allí números pares enteros del dos al dieciocho de tal manera que si sumamos los que se ubican en el entorno de cada figura el resultad es un mismo valor.



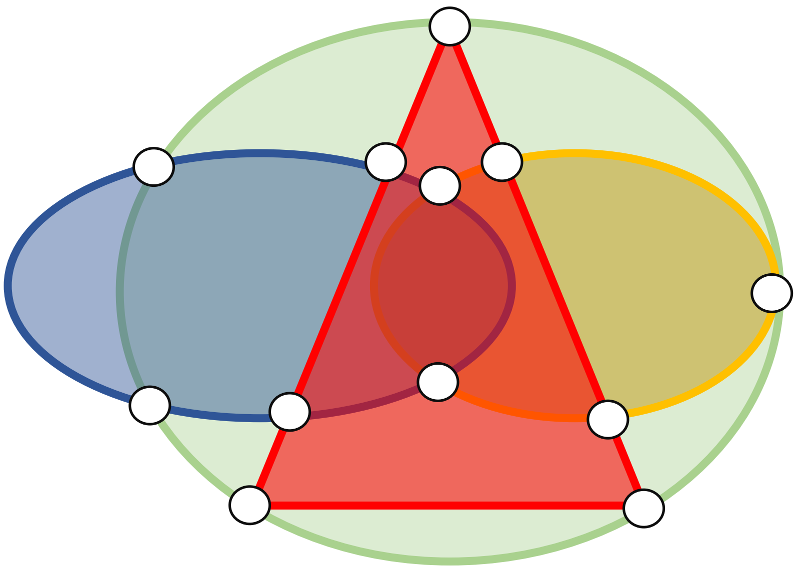
Memoreto 43. Se han dibujado dos círculos y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando trece puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte un número entero entre uno y trece, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



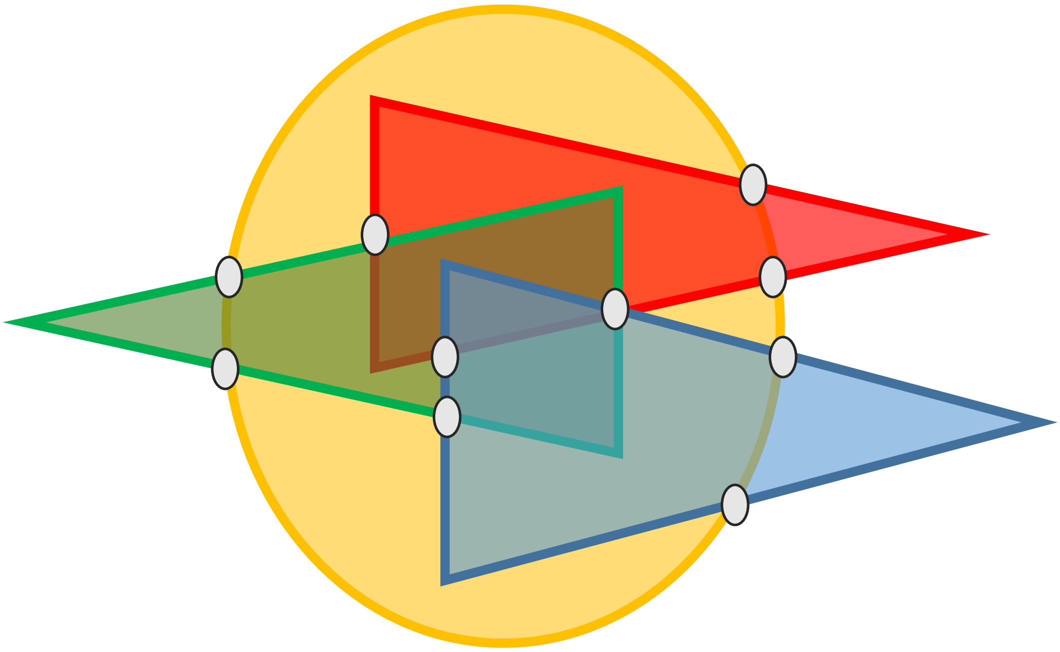
Memoreto 44. Se ha dibujado un círculo, dos elipses y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando trece puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte un número entero entre dos y catorce, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



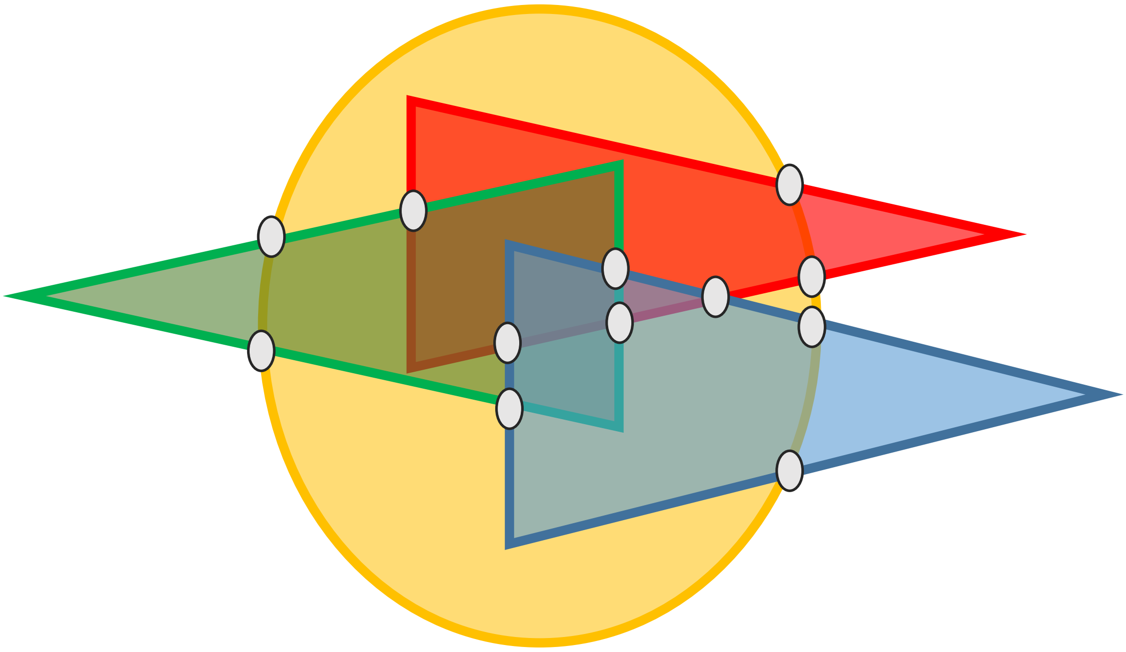
Memoreto 45. Se ha dibujado un círculo, dos elipses y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte un número entero par entre dos y veinte y cuatro, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



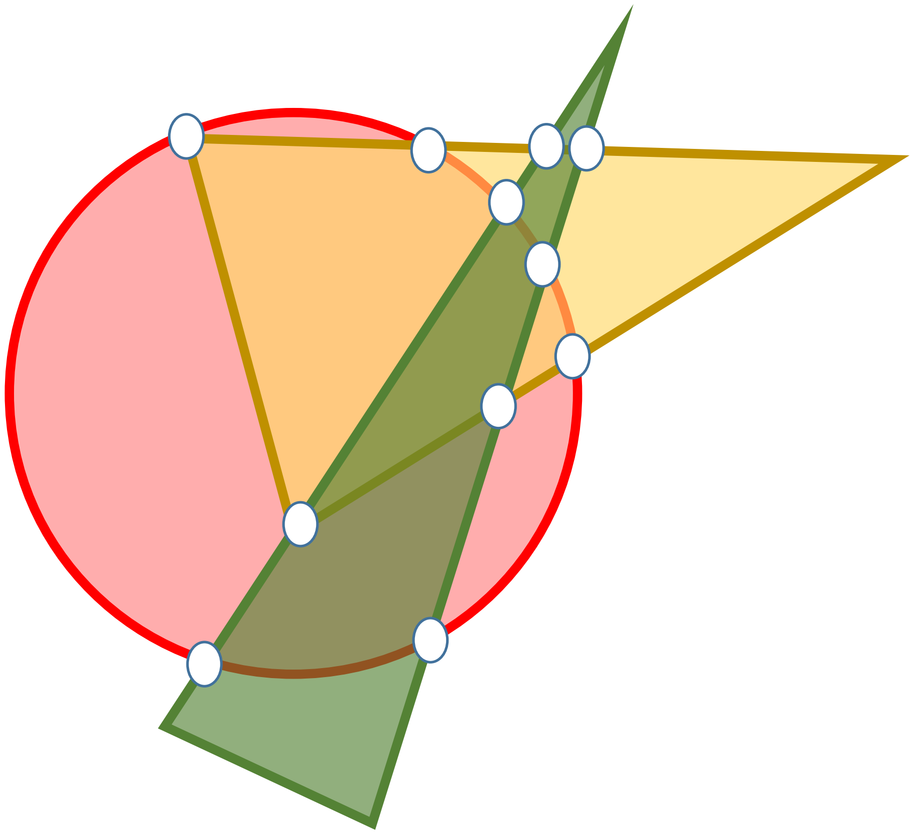
Memoreto 46. Se ha dibujado un círculo y tres triángulos, tal como se observa en la figura, generando diez puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte, sin repetición, un número entero múltiple de tres entre tres y treinta, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



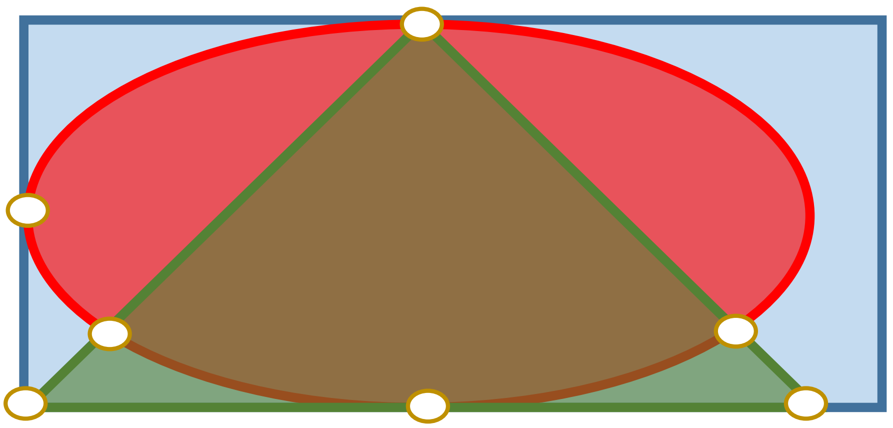
Memoreto 47. Se ha dibujado un círculo y tres triángulos, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte, sin repetición, un número entero múltiple de cuatro entre cuatro y cuarenta y ocho, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



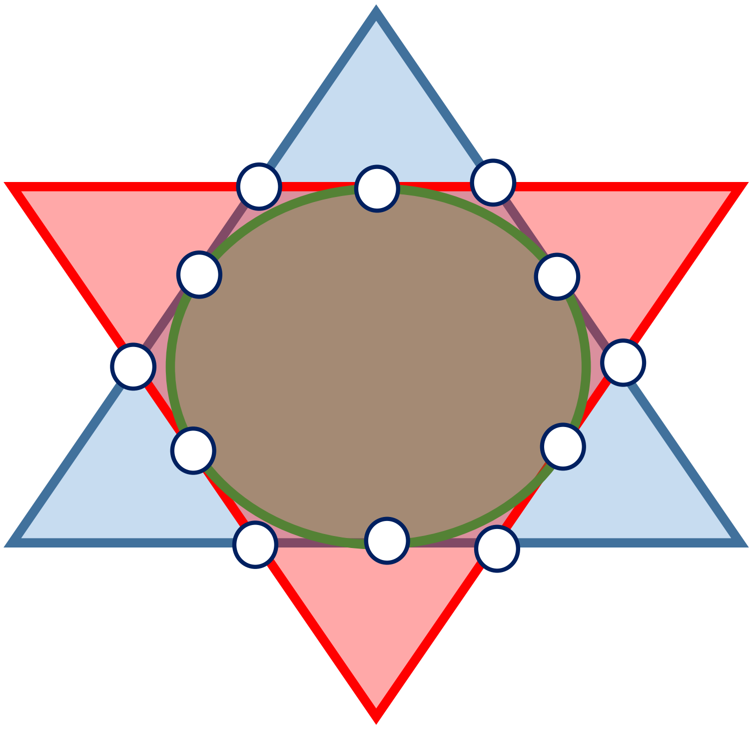
Memoreto 48. Se ha dibujado un círculo y tres triángulos, tal como se observa en la figura, generando once puntos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte, sin repetición, un número entero múltiple de cinco, entre cinco y cincuenta y cinco, de tal forma que al sumar os que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



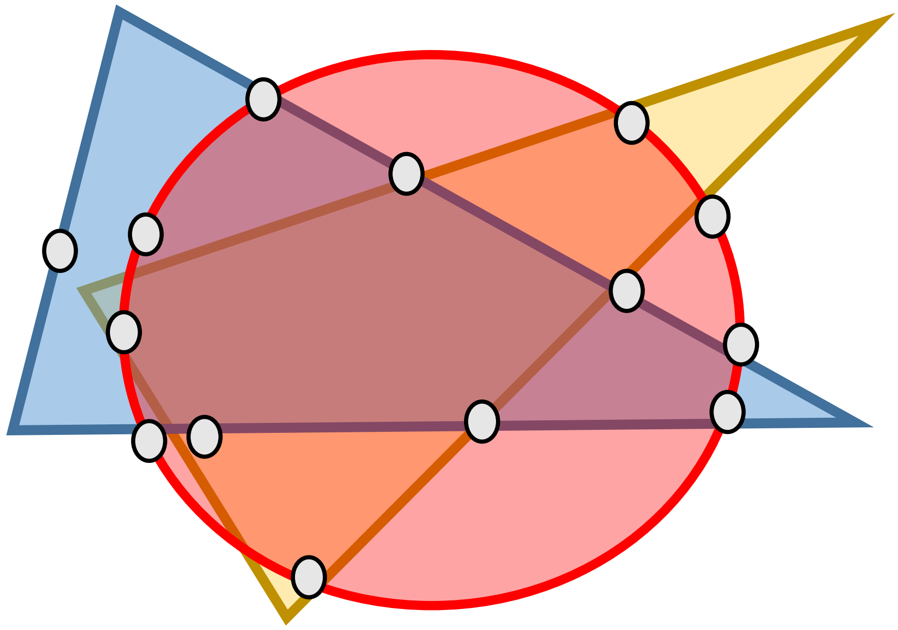
Memoreto 49. Se ha dibujado una elipse, un triángulo y un rectángulo, tal como se observa en la figura, generando siete puntos especiales en sus cortes. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos, sin repetición, un número entero múltiple de siete, entre siete y cuarenta y nueve, de tal forma que al sumar los que se ubican en cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea un mismo valor.



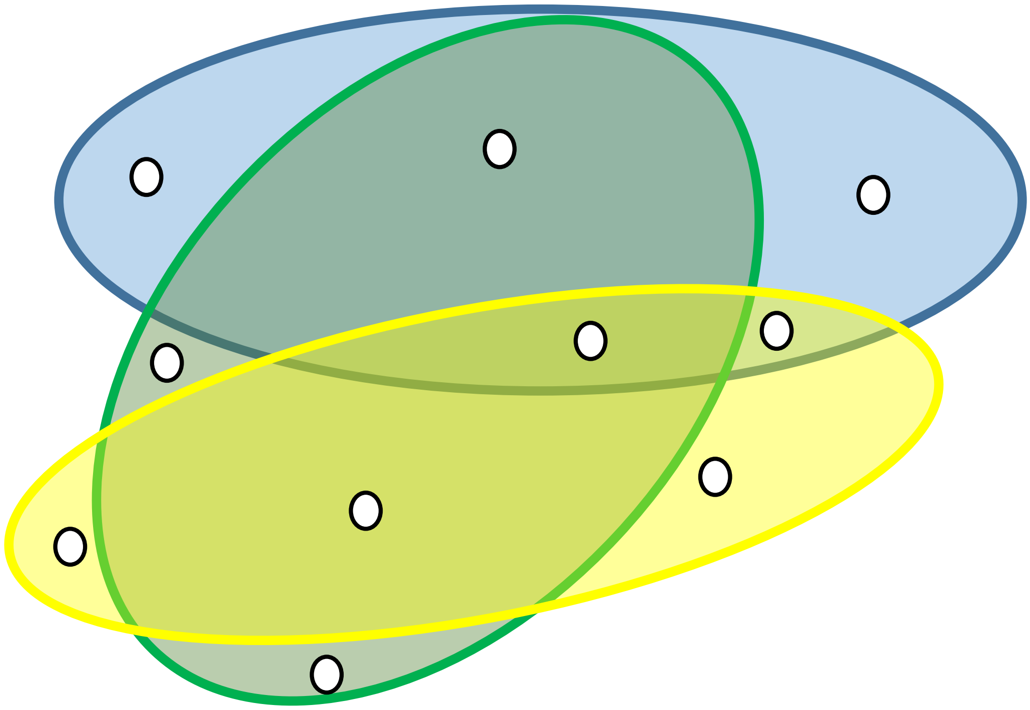
Memoreto 50. Se ha dibujado una elipse y dos triángulos, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de cortes. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos, sin repetición, un número entero, entre uno y doce, de tal forma que al sumar los que se ubican en cualquiera de las tres figuras el resultado sea un mismo valor.



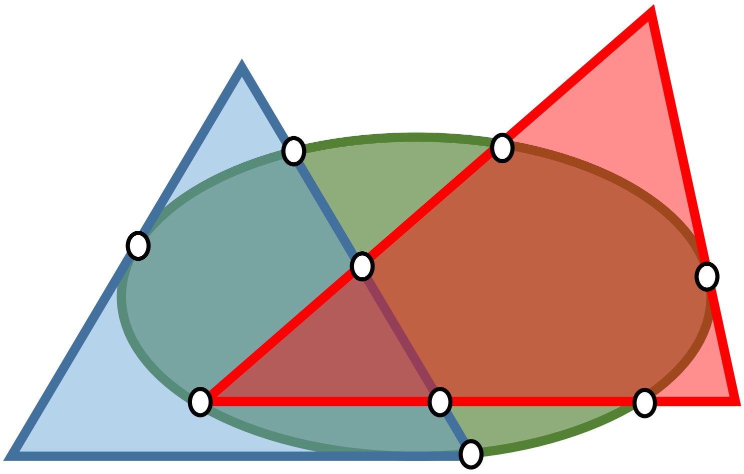
Memoreto 51. Se ha dibujado un circulo dos triángulos, tal como se observa en la figura, generando catorce puntos de cortes. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos, sin repetición, un número entero, entre uno y catorce, de tal forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las tres figuras el resultado sea un mismo valor.



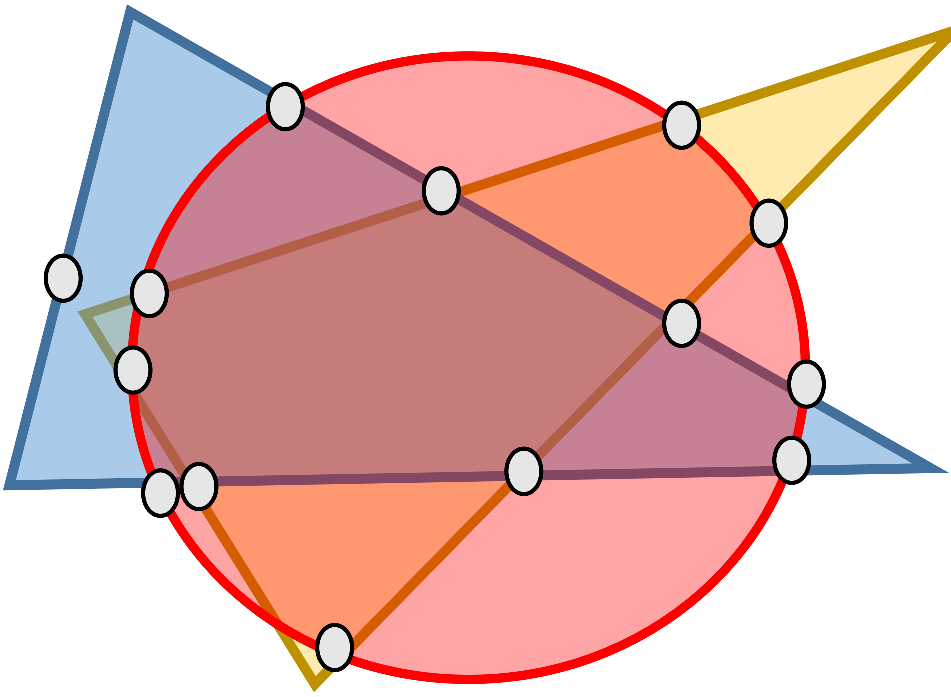
Memoreto 52. Se han dibujado tres elipses, como se observa en la figura, generando diez regiones definidas, se pide ubicar en cada una de estas regiones un número entero de la serie {3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48), sin repetición, de manera que al sumar los que se ubican dentro de cualquiera de las elipses el resultado sea un mismo valor.



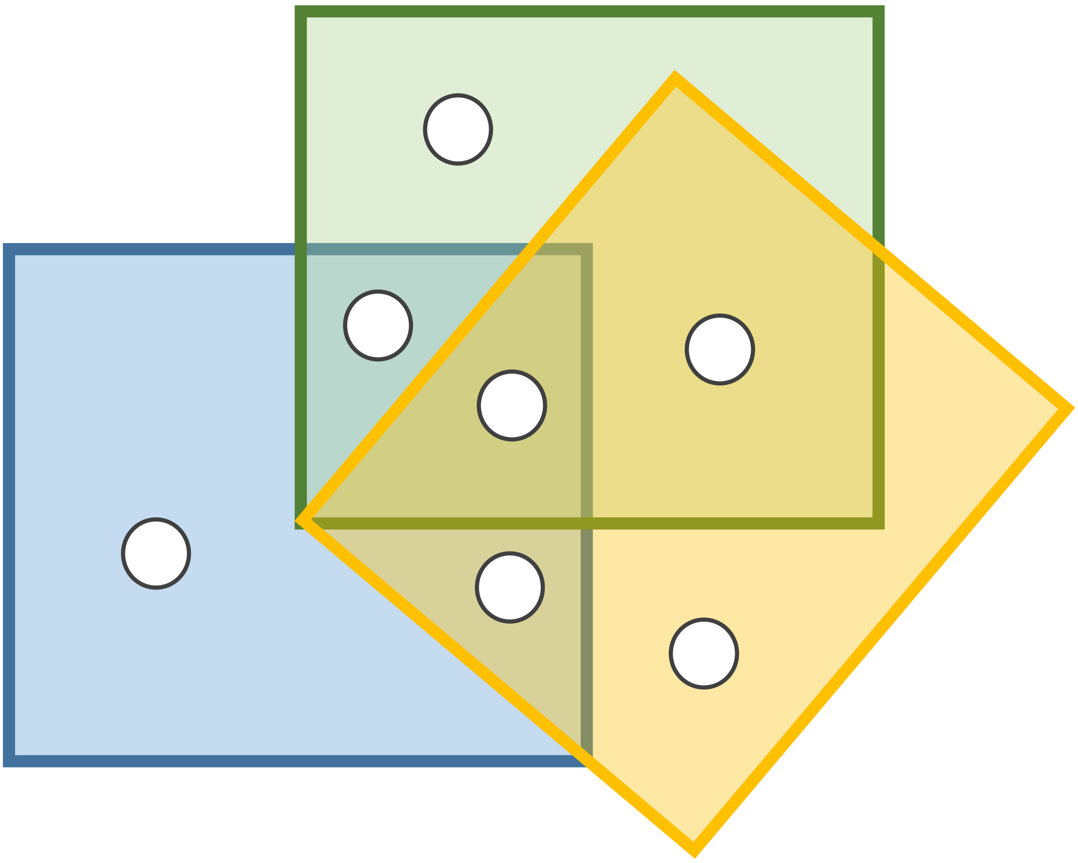
Memoreto 53. Se ha dibujado dos triángulos y una elipse, como se observa en la figura, generando nueve puntos de corte. Se pide ubicar en cada corte, un número entero múltiple de cinco, entre cinco y cuarenta y cinco, de forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquier figura, el resultado sea el mismo.



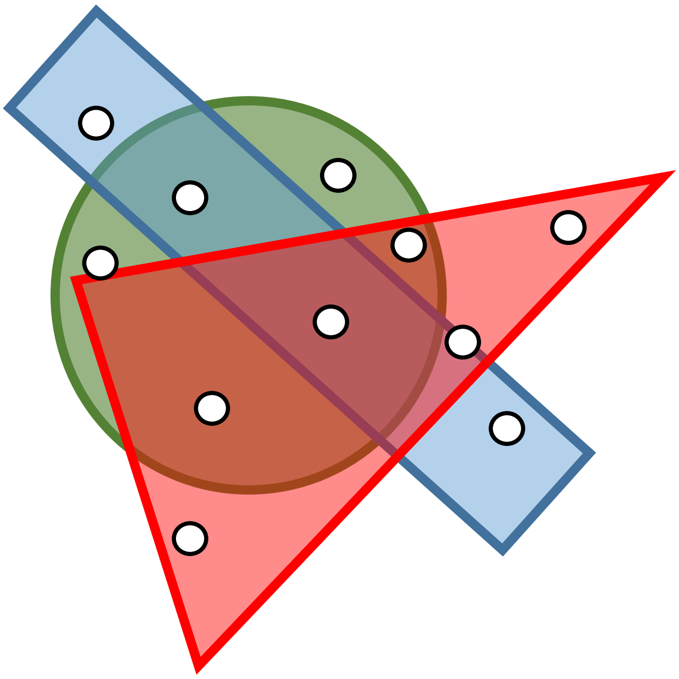
Memoreto 54. Se ha dibujado dos triángulos y una elipse, como se observa en la figura, generando catorce puntos de corte. Se pide ubicar, sin repetición, un número entre uno y catorce de forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquier figura, el resultado sea el mismo.



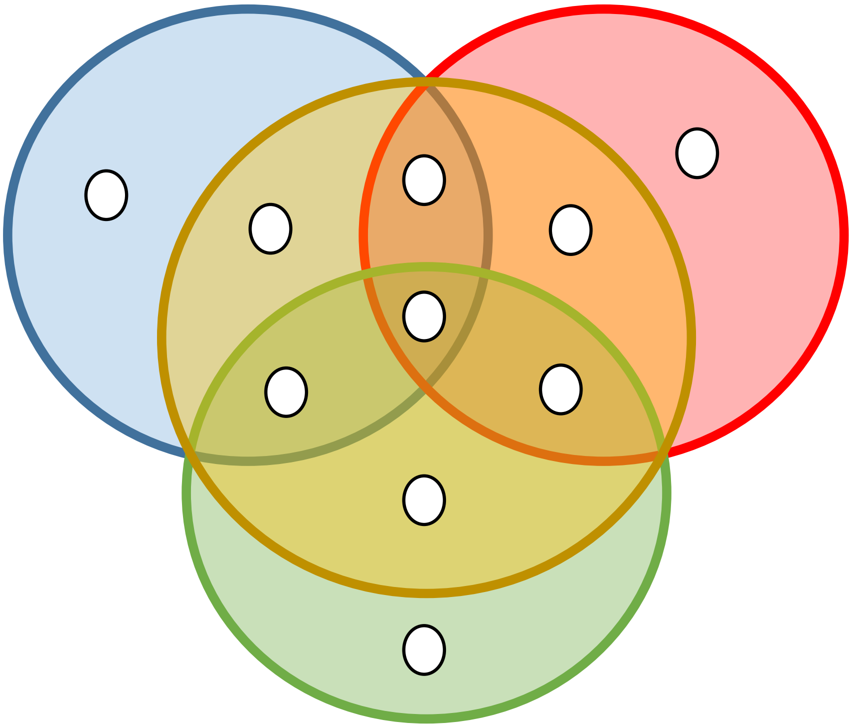
Memoreto 55. Se ha dibujado tres cuadrados, tal como se observa en la figura, generando 7 áreas distintas. Se pide ubicar allí números enteros menores a veinte, de tal forma que al multiplicar los elementos que se encuentran al interior de cualquier cuadrado el resultado sea un mismo valor.



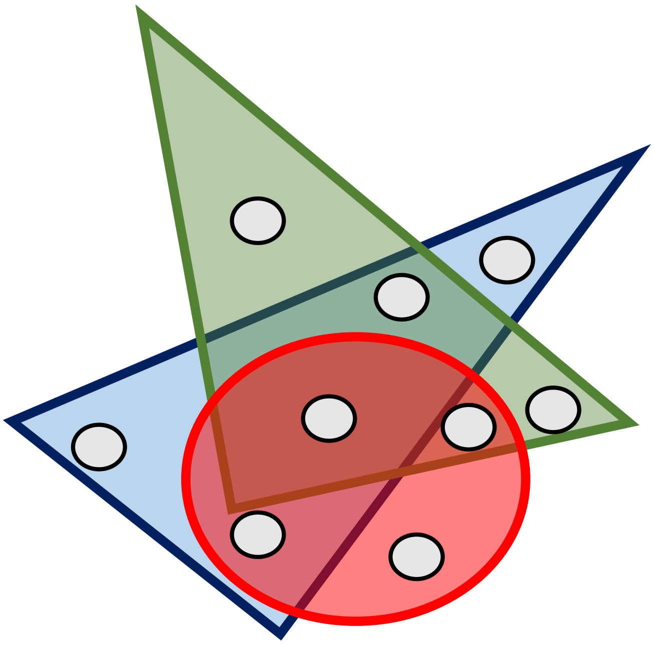
Memoreto 56. Se han dibujado una elipse, un rectángulo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando once regiones distintas. Se pide ubicar en cada región un número natural distinto, entre 1 y once, de tal forma que su sumamos los que se ubican al interior de cualquiera de tres figuras, el resultado sea un mismo valor.



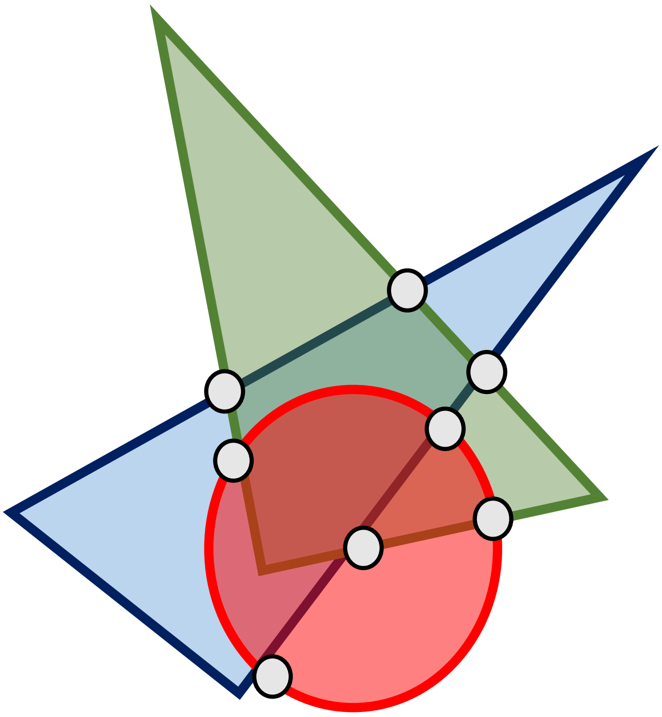
Memoreto 57. Se han dibujado cuatro círculos, tal como se observa en la figura, generando diez regiones distintas, se pide ubicar en cada región un número entero distinto, de tal forma que si sumamos los ubicados dentro de cualquiera de los círculos, el resultado es un mismo valor.



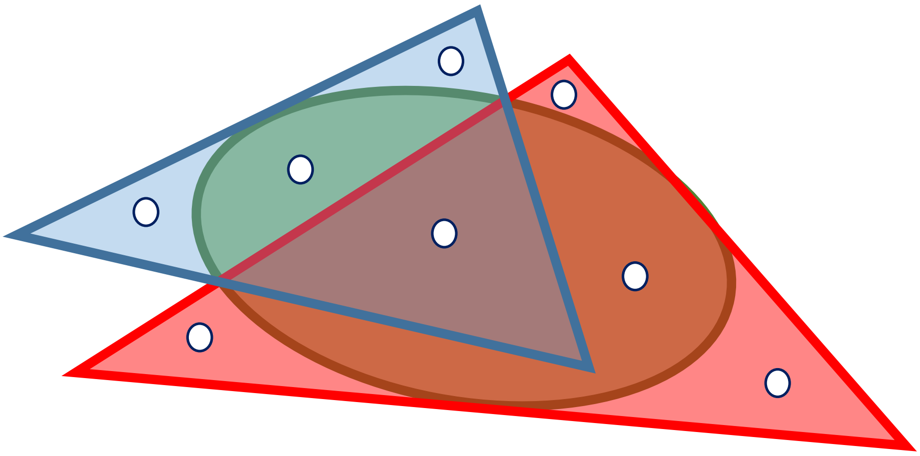
Memoreto 58. Se han dibujado dos triangulos y un circulo, tal como se observa en la figura, generando nueve regiones. Se pide ubicar en cada region un número entero distinto entre uno y nueve, de tal forma que al sumar los que se ubican denro de cualquiera de las tres figuras el resultado sea el mismo.



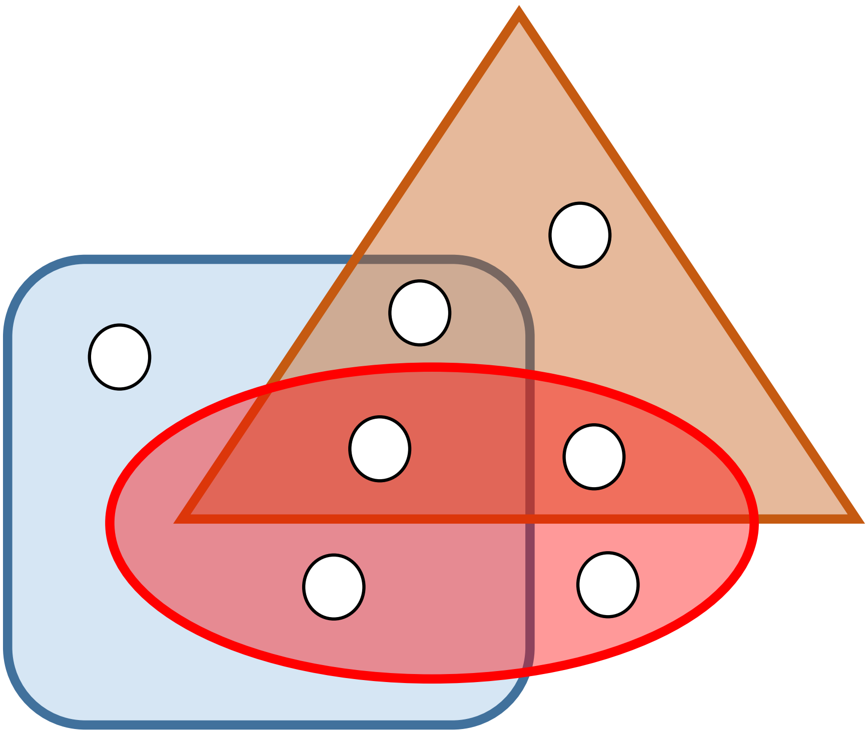
Memoreto 59. Se han dibujado dos triangulos y un circulo, tal como se observa en la figura, generando pocho puntos de corte. Se pide ubicar en cada corte un número entero distinto entre uno y ocho, de tal forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las tres figuras el resultado sea el mismo.



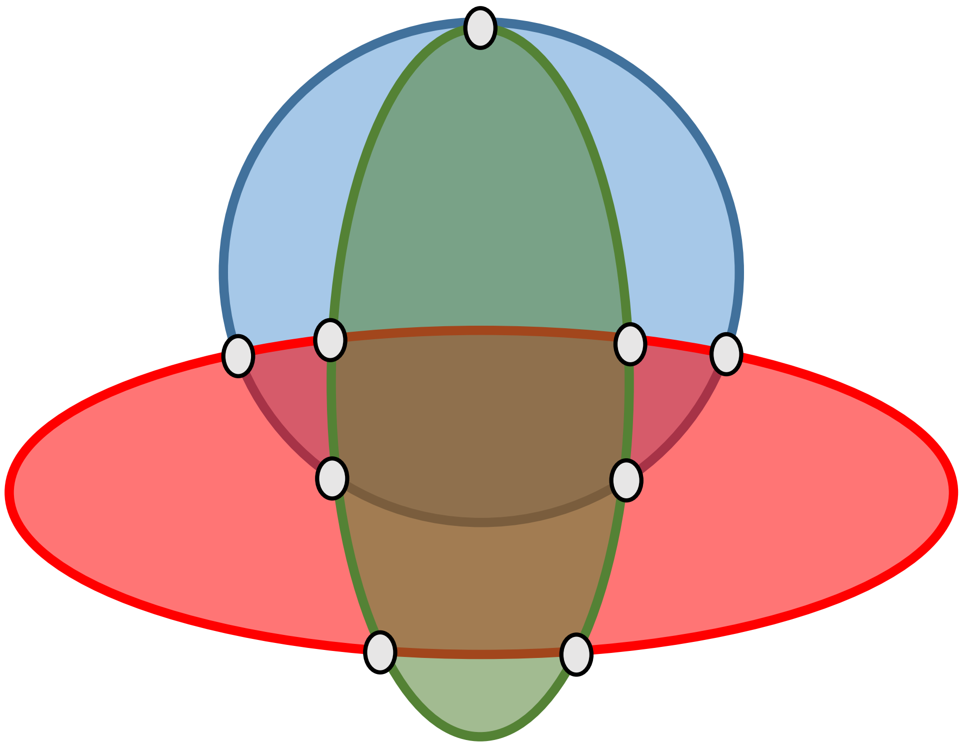
Memoreto 60. Se han dibujado dos triángulos y una elipse, tal como se observa en la figura generando ocho regiones, se plantea ubicar allí un número múltiplo de dos distinto entre dos y dieciséis, de tal forma que al sumar lo que se ubican dentro de cualquiera de las tres figuras el resultado es el mismo.



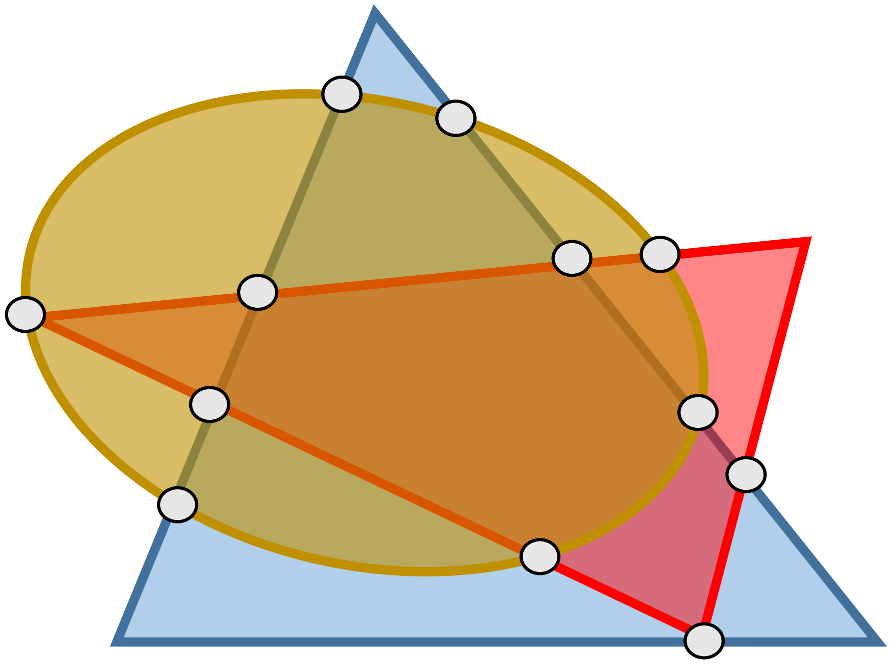
Memoreto 61. Se han dibujado un triángulo, una elipse y un cuadrado, tal como se observa en la figura, generando siete regiones diferentes. Se pide ubicar en cada región un número entero positivo menor o igual a diez, de forma que al multiplicar los ubicados dentro de cualquiera de las figuras el resultado es el mismo.



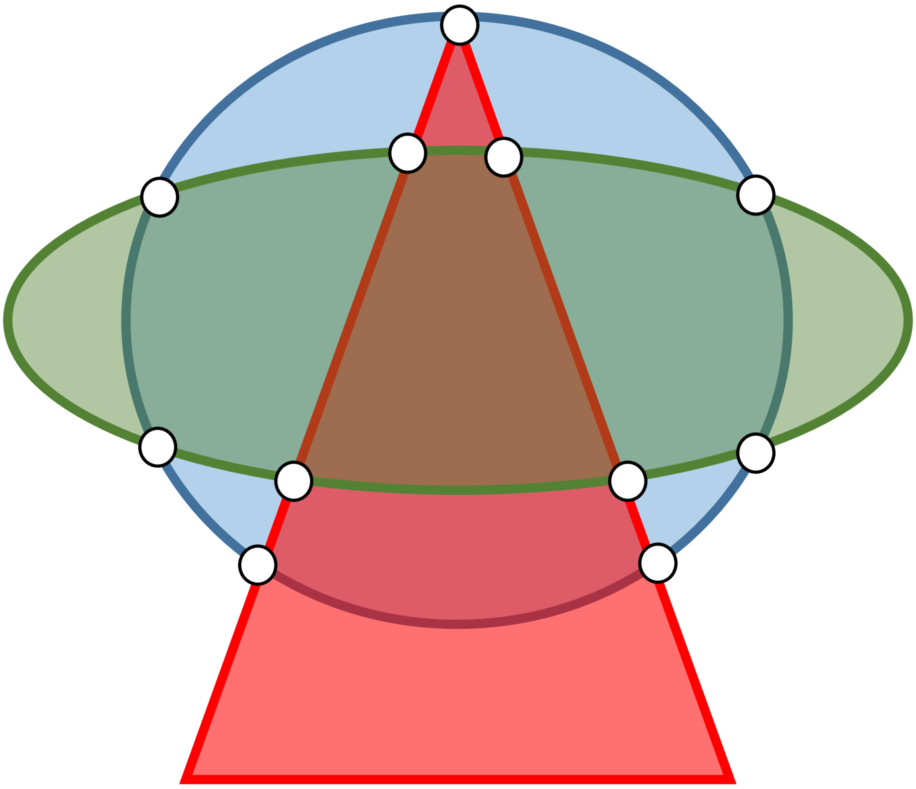
Memoreto 62. Se han construido dos elipses y un círculo, generando nueve puntos de corte, tal como se observa en la figura, se pide ubicar allí enteros del uno al nueve sin repetición, de tal forma que al sumar las que se encuentran en el entorno de cada figura, el resultado sea un mismo valor**.**



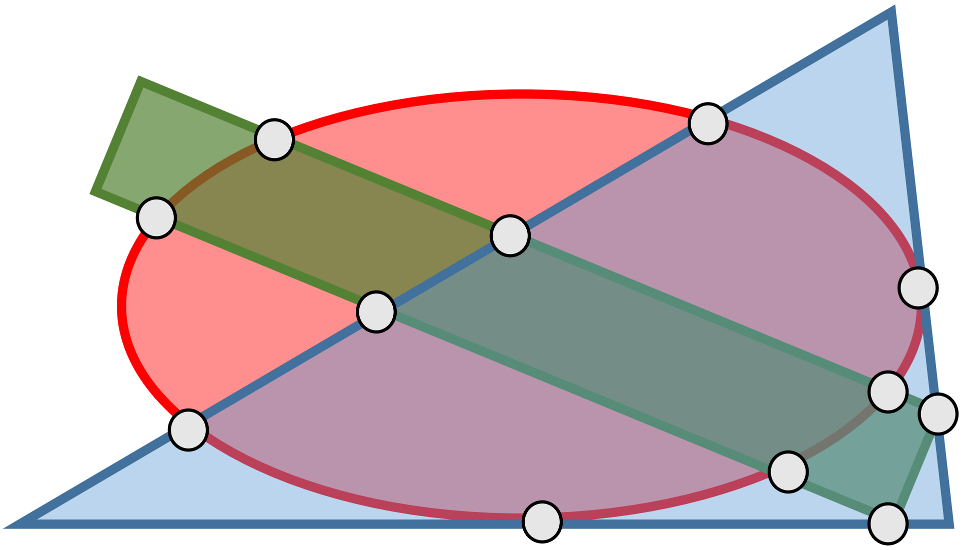
Memoreto 63. Se han dibujado dos triángulos y una elipse, generando doce puntos de corte tal como se observa en la figura. Se pide en ubicar en cada punto de corte un número entero entre el uno y el doce, de tal forma que al sumar los ubicados en cualquiera de las figuras el resultado sea el mismo.



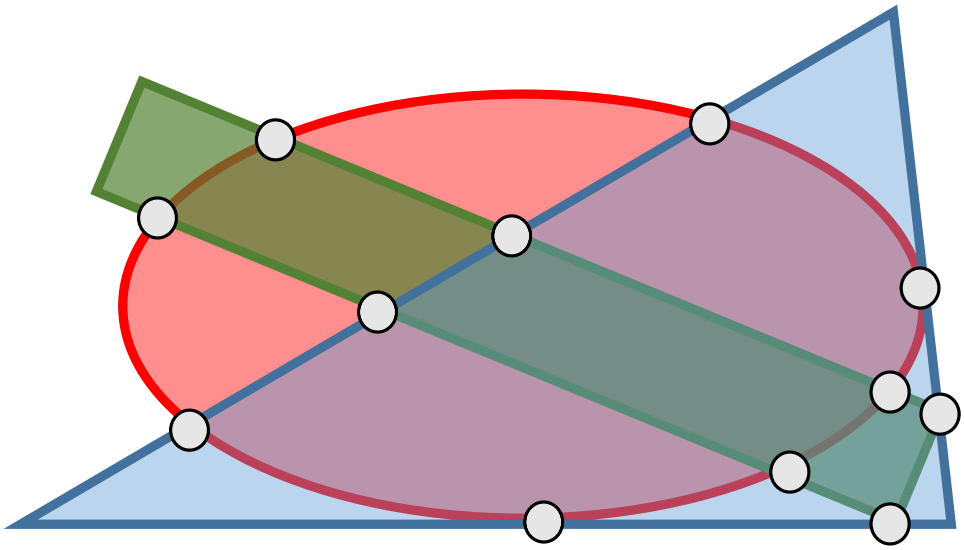
Memoreto 64. Se han dibujado un círculo, una elipse y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando once puntos de corte. Se pide ubicar en cada una de esas intersecciones, números pares entre dos y veinte y dos, de tal forma que al sumar los ubicados en cualquiera de las tres figuras, el resultado sea el mismo.



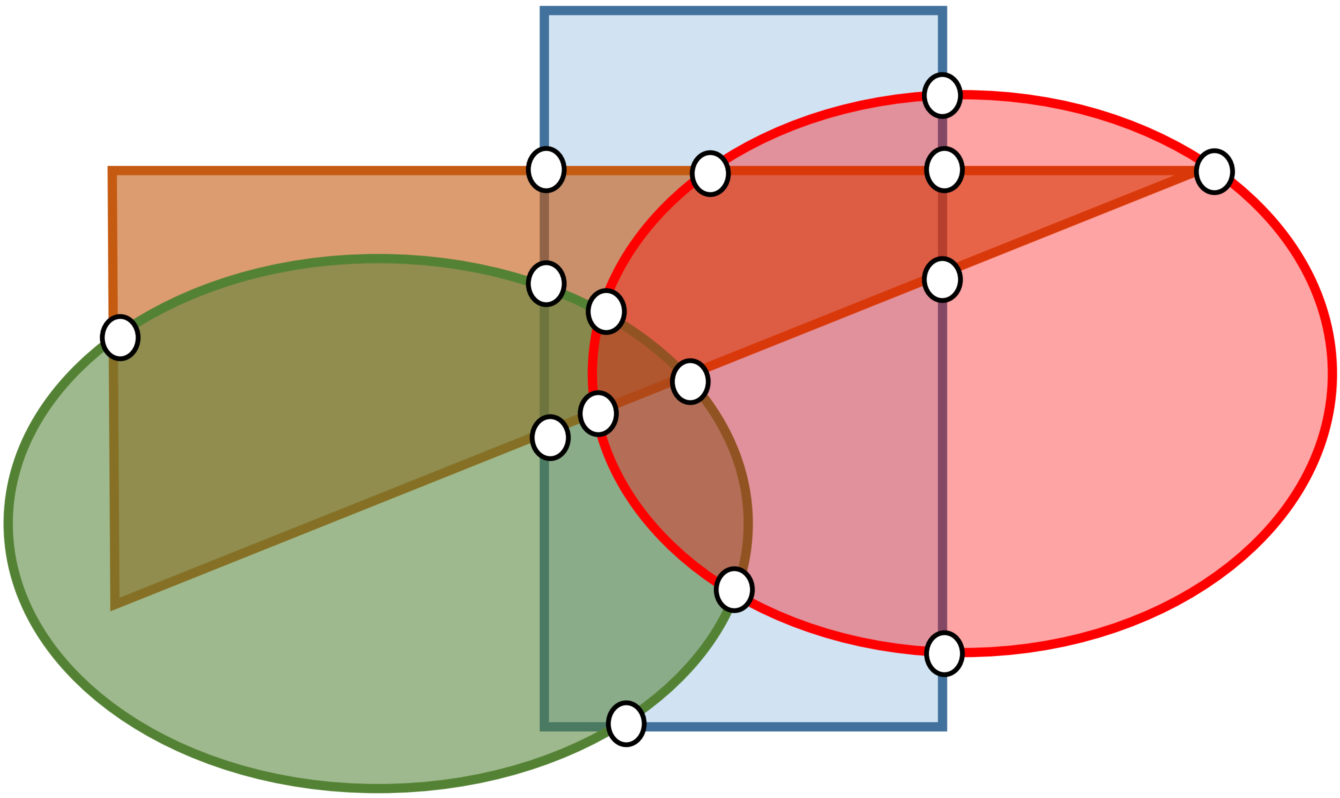
Memoreto 65. Se han dibujado un rectángulo, una elipse y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de corte. Se pide ubicar en cada una de esas intersecciones, números múltiples de tres, entre tres y veinte y dos, de tal forma que al sumar los ubicados en cualquiera de las tres figuras, el resultado sea el mismo.



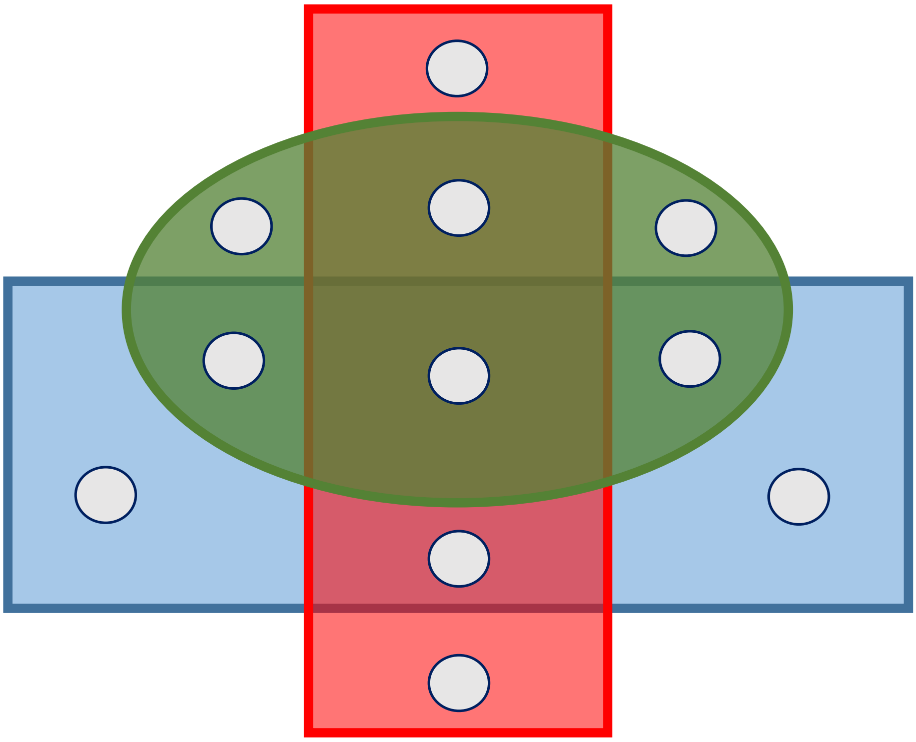
Memoreto 66. Se han dibujado un rectángulo, una elipse y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de corte. Se pide ubicar en cada una de esas intersecciones, números de la serie {-20,-10,-8,-7, -6,-1, 1, 2, 5, 13, 15, 16} de tal forma que al sumar los ubicados en cualquiera de las tres figuras, el resultado sea el mismo.



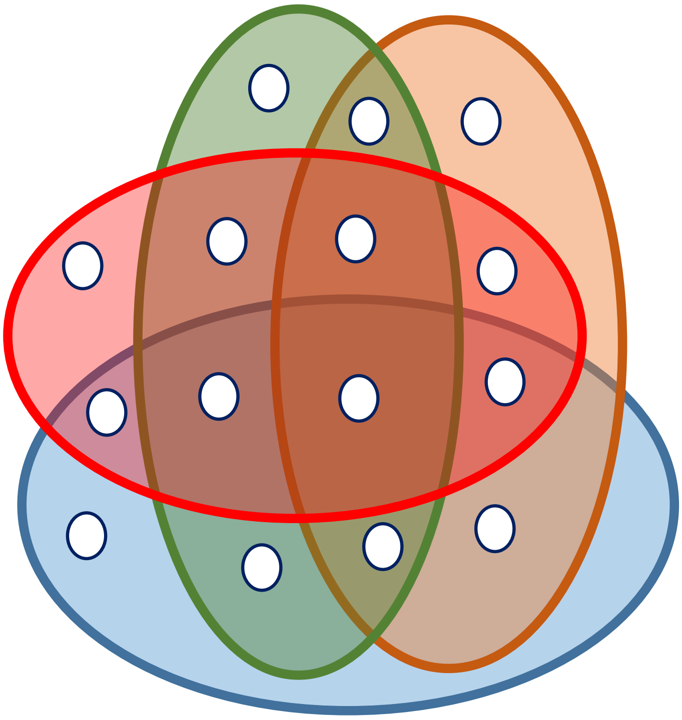
Memoreto 67. Se ha dibujado un rectángulo, un triángulo y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando quince puntos de corte, se pide ubicar en cada punto de intersección un número entero entre uno y quince, sin repetición, de tal forma que al sumar los valores que se ubican en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras el resultado es el mismo.



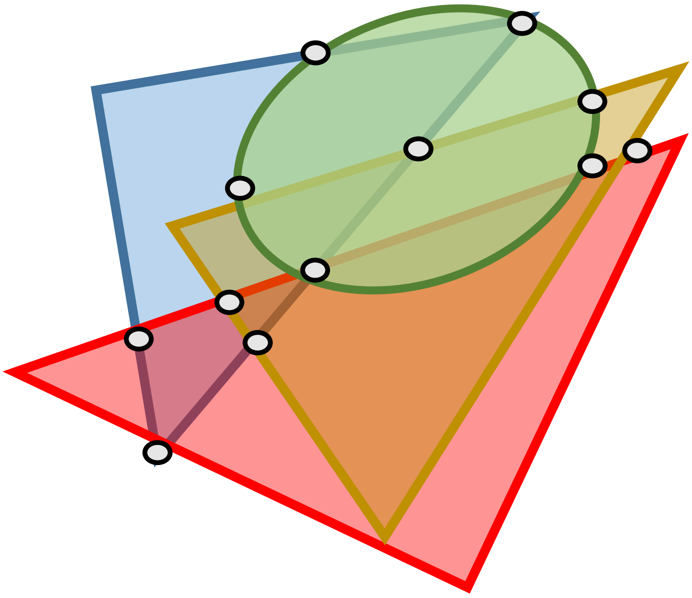
Memoreto 68. Se han dibujado dos rectángulos y una elipse, generando once regiones distintas. Pedimos ubicar en cada región uno de los primeros once números naturales sin repetición, de forma que al sumar los que están dentro de cualquiera de las tres figura el resultado es el mismo.



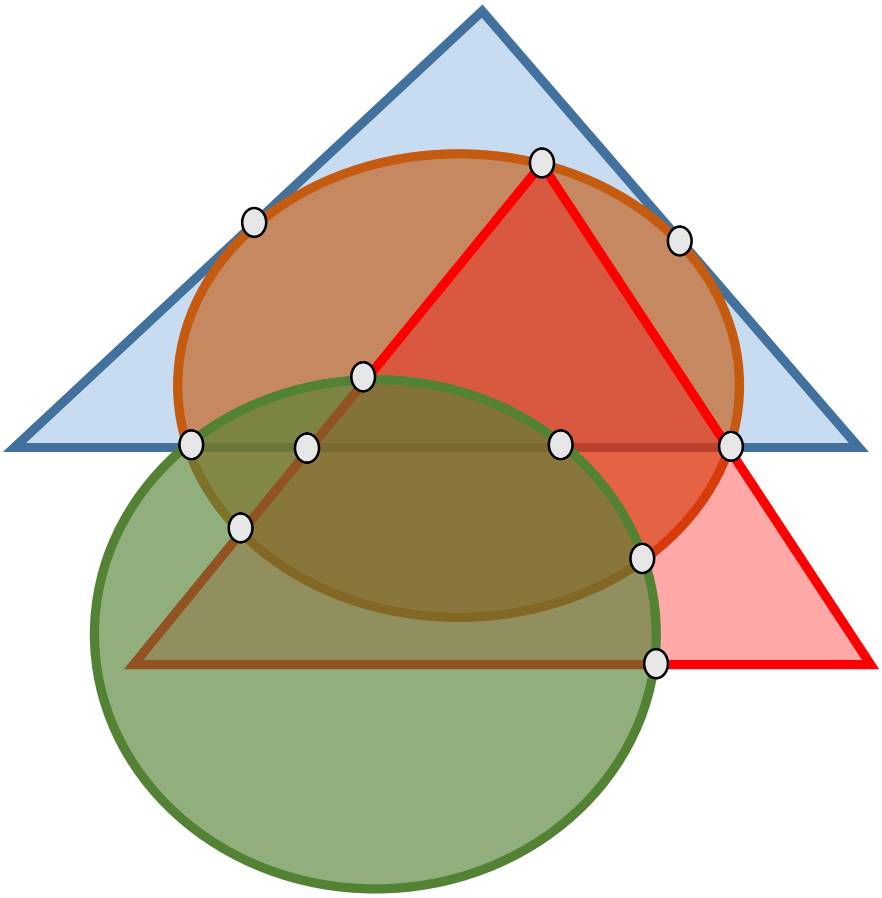
Memoreto 69. Se han dibujado cuatro elipses, tal como se observa en la figura, generando quince regiones, se pide ubicar en cada uno de ellas un número entero entre uno y quince, de forma que al sumar los valores de las regiones que conforman cualquiera de las cuatro figuras el resultado sea el mismo valor.



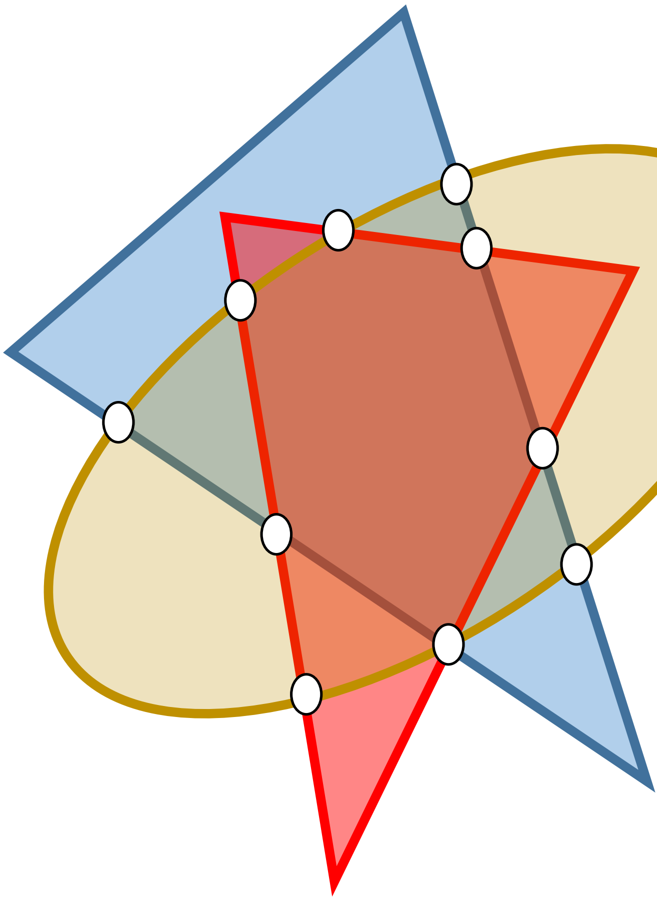
Memoreto 70. Se han dibujado tres círculos y una elipse, tal como se muestra en la figura, generando doce puntos de corte, se pide ubicar en cada corte un número entero, entre uno y doce, sin repetición, de tal forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las figuras el resultado para cualquiera de ellas sea el mismo.



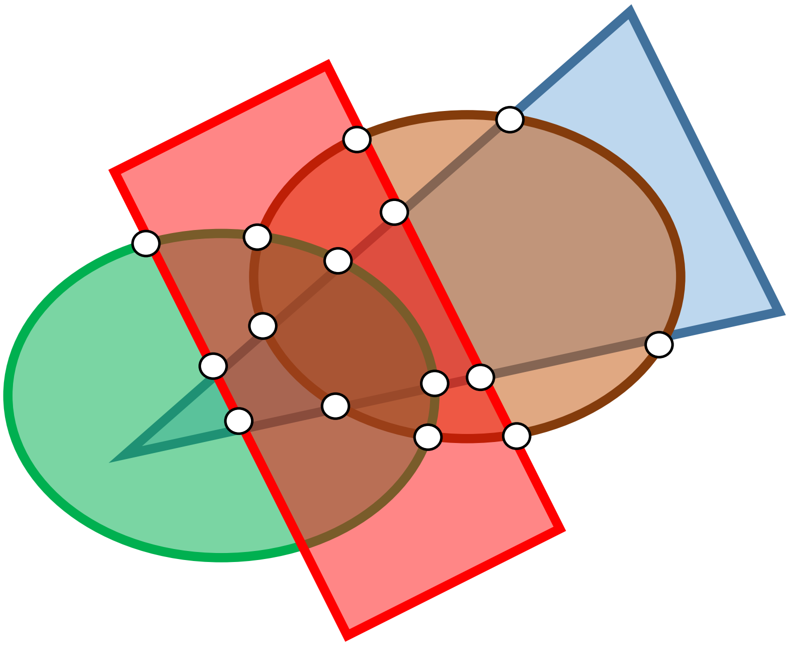
Memoreto 71. Se han dibujado dos triángulos y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando once puntos de corte. Se pide ubicar en cada uno de esos puntos un número par entre dos y veinte y dos de tal forma que al sumar los ubicados en el entorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea igual.



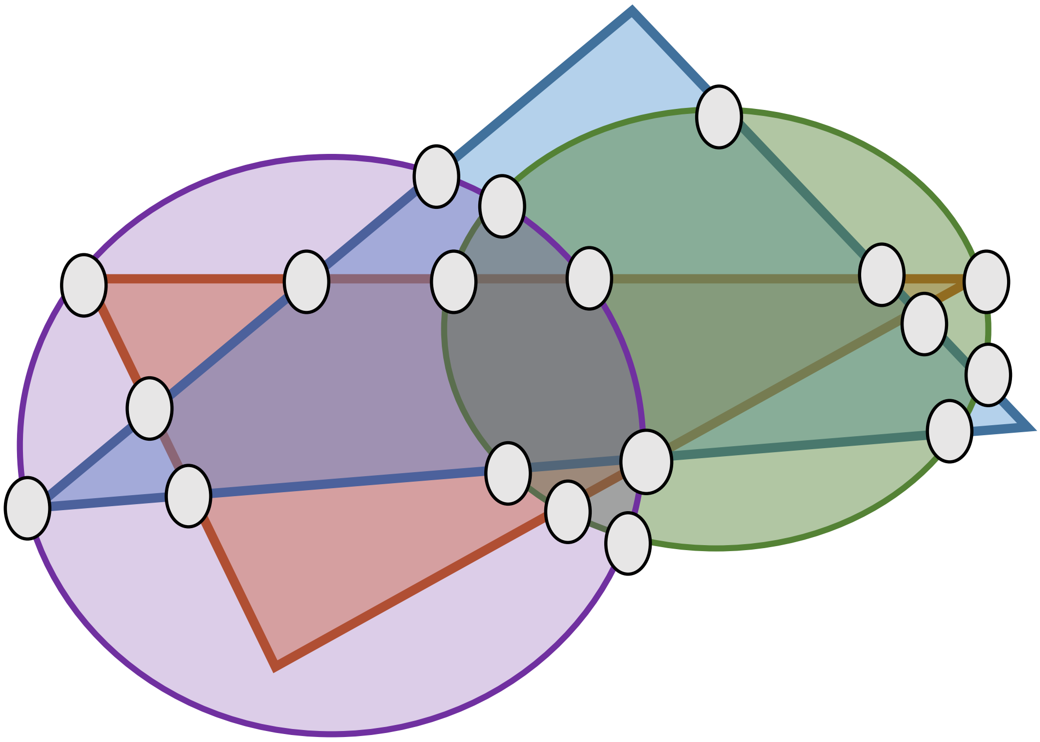
Memoreto 72. Se han dibujado dos triángulos y una elipse, tal como se observa en la figura, generando diez puntos de corte, se pide ubicar sin repetición un entero entre 5 y 14, de tal forma que al sumar los que se ubican en el contorno de cualquiera de las figuras, el resultado es el mismo.



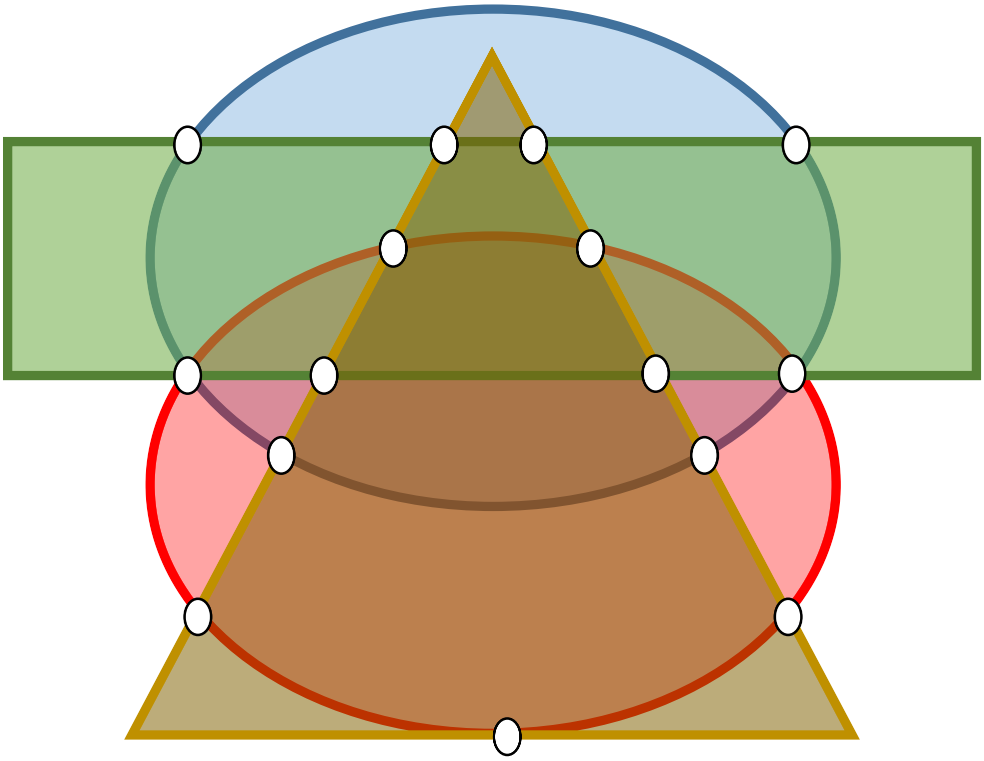
Memoreto 73. Se han dibujad0 dos elipses, un triángulo y un rectángulo, tal como se observa en la figura. Generando dieciséis puntos de corte. Se pide ubicar en cada intersección un múltiplo de tres, entre tres y cuarenta y ocho, de forma que al sumar los ubicados en contorno de cualquiera de las cuatro figuras en resultado sea un mismo valor.



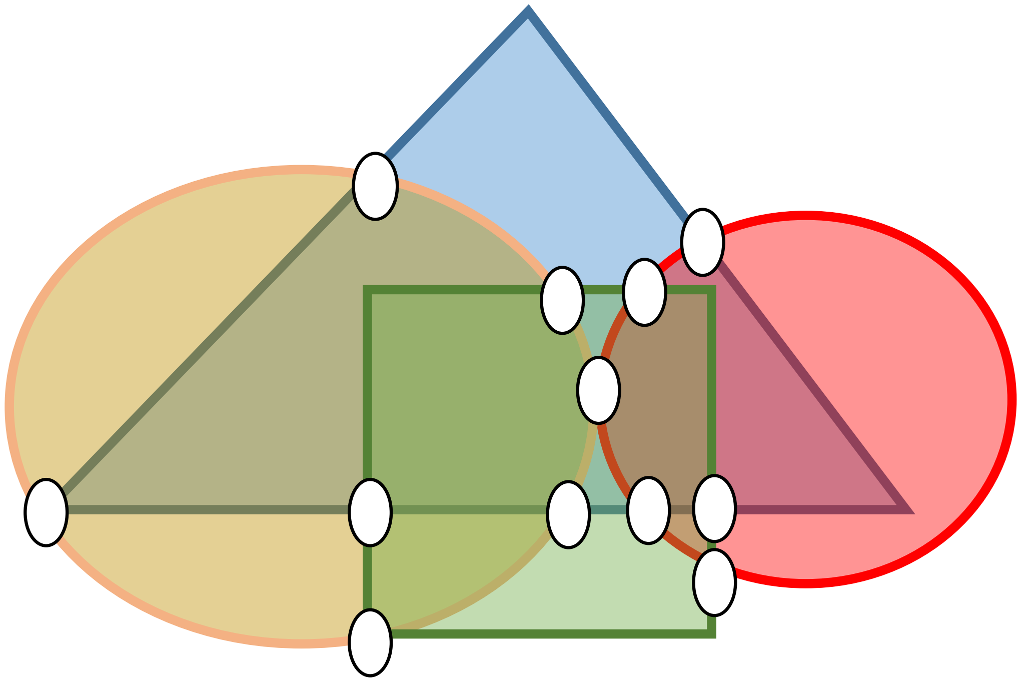
Memoreto 74. Se han dibujado dos triángulos y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando diecinueve pontos de corte. Se pide ubicar en cada punto de corte, un número entero entre uno y diecinueve, sin repetición, de forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las figuras el resultado sea el mismo para cualquier figura.



Memoreto 75. Se han dibujado dos elipses, un rectángulo y un triángulo, tal como se observa en la figura, generando quince puntos de corte. Se pide ubicar en cada uno de esos cortes, un número entero distinto, múltiplo de dos, entre dos y treinta, de tal forma que al sumar los ubicados en el entorno de cualquiera de las figuras, el resultado sea el mismo.

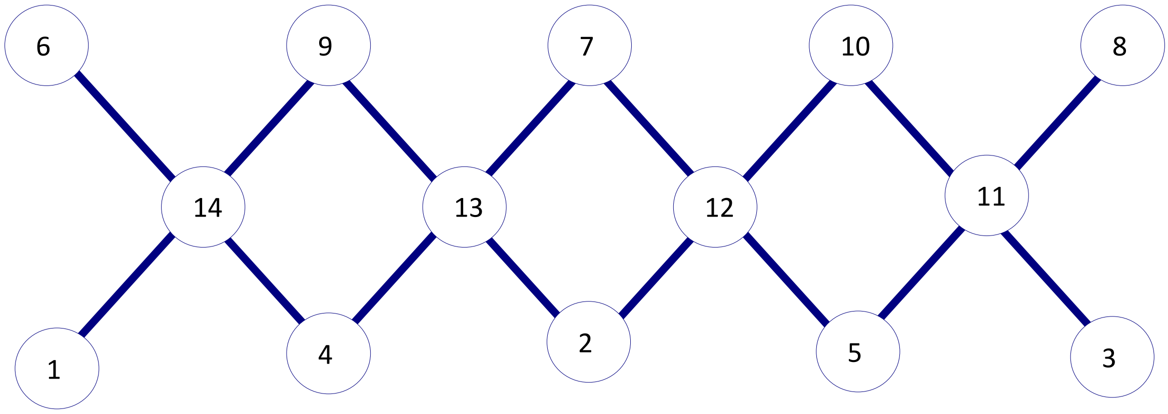


Memoreto 76. Se han dibujado un triángulo, un cuadrado y dos elipses, tal como se observa en la figura, generando doce puntos de corte. Se pide ubicar en esas intersecciones números enteros entre uno y doce, sin repetición, de forma que al sumar los ubicados en el contorno de cualquiera de las cuatro figuras, el resultado sea el mismo.

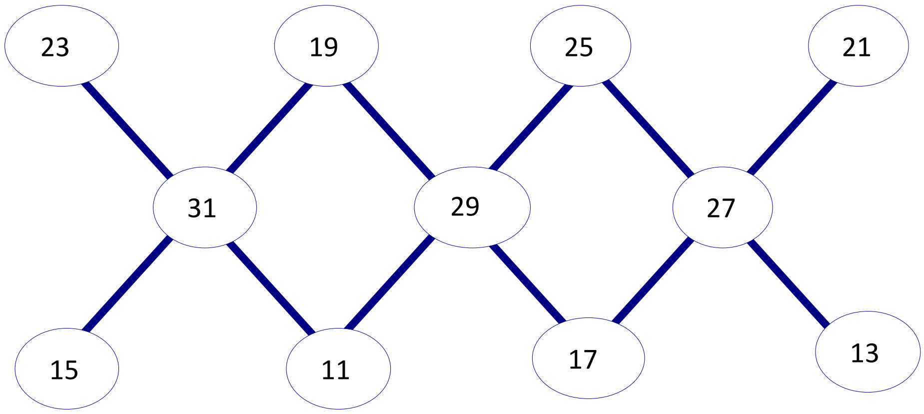


A continuación presentamos las soluciones a los retos planteados, en función del número asignado.

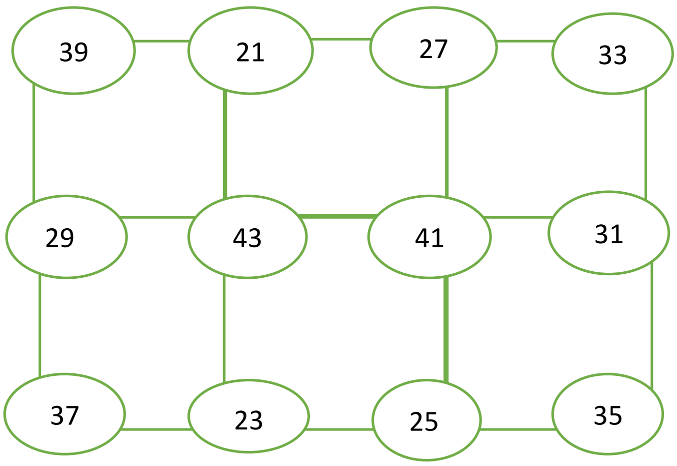
Solución 1.



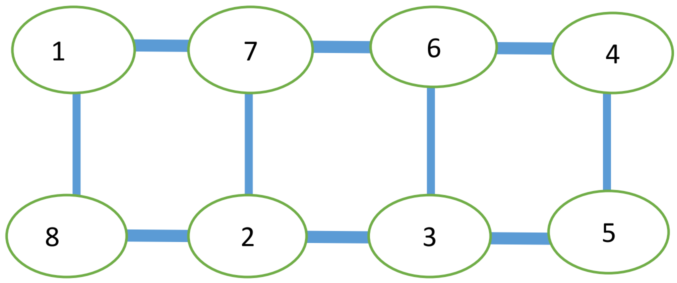
Solución 2.



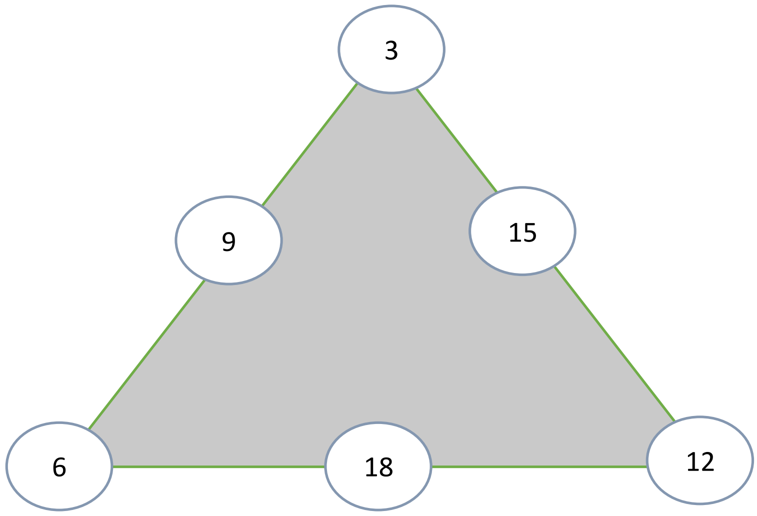
Solución 3.



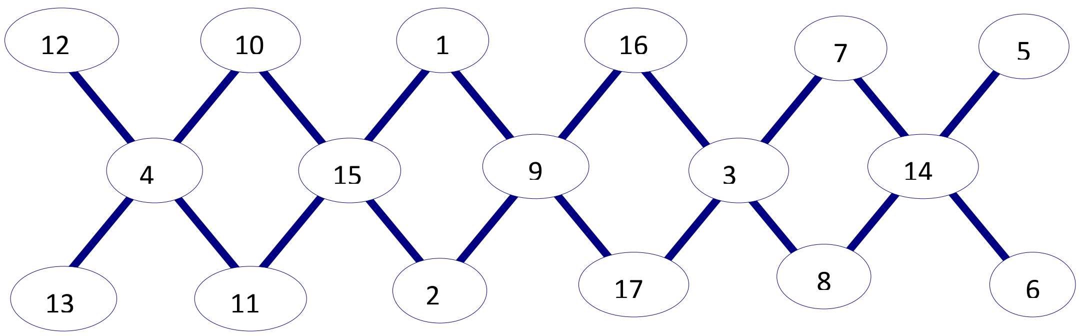
Solución 4.



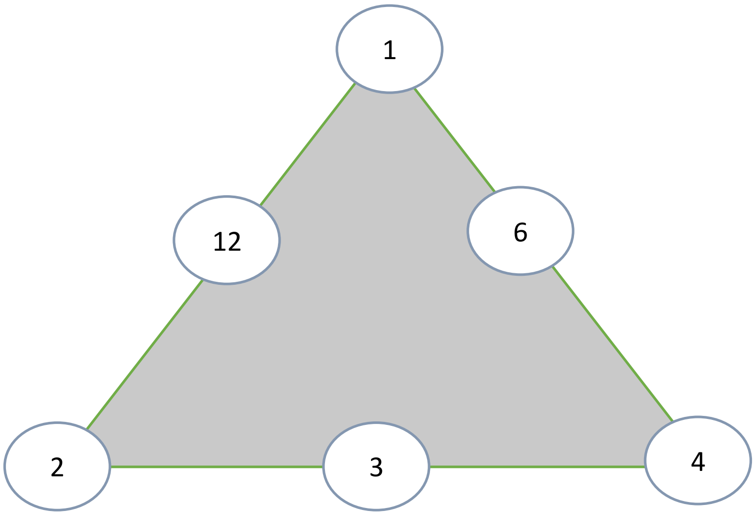
Solución 5.



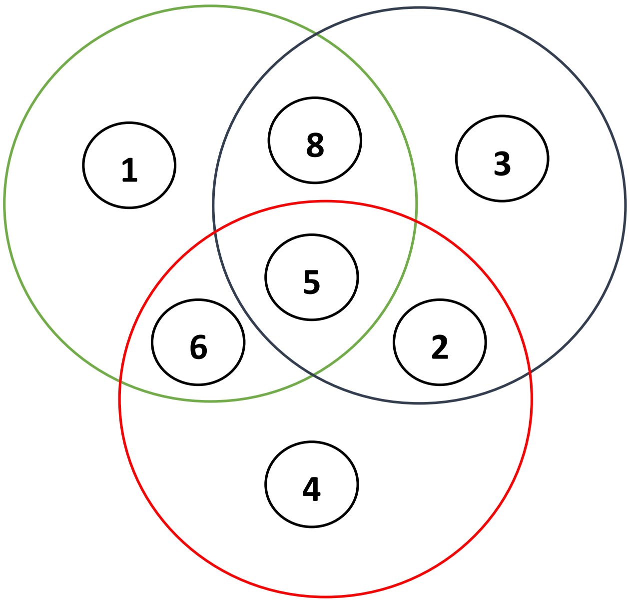
Solución 6.



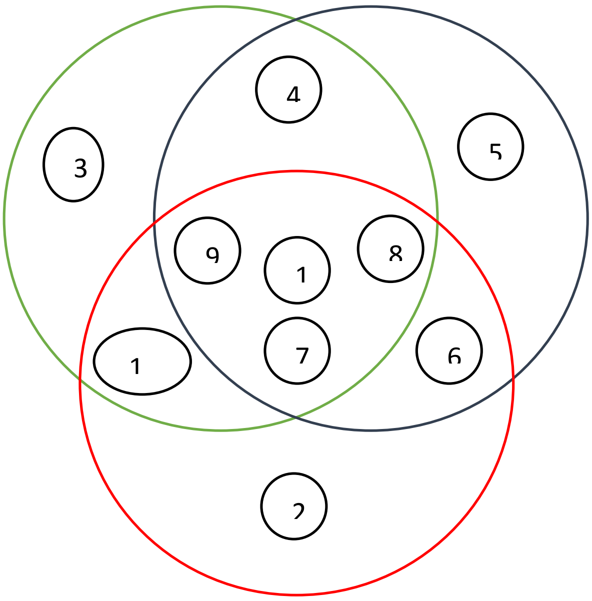
Solución 7.



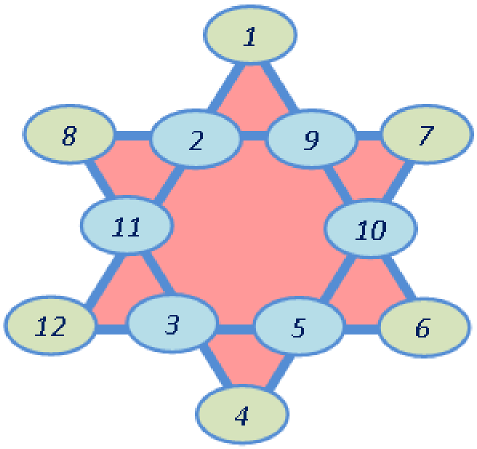
Solución 8.



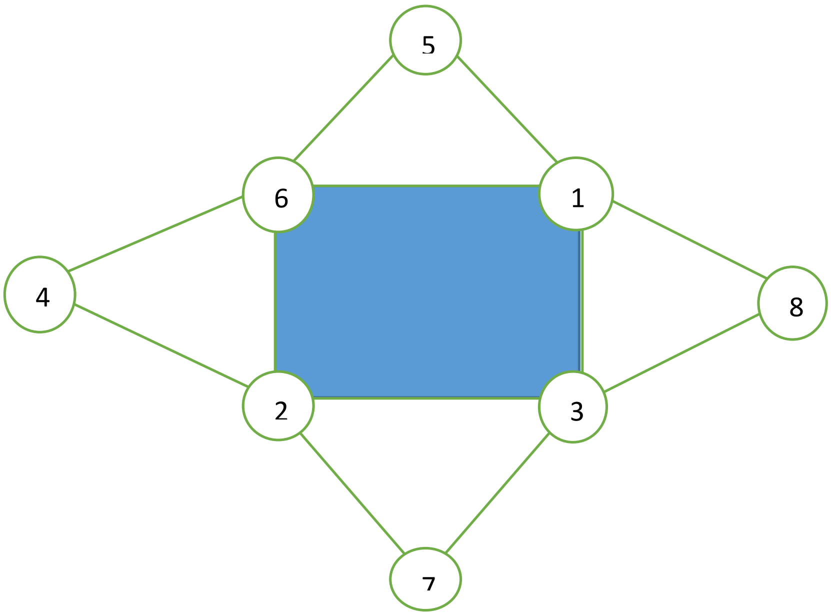
Solución 9.



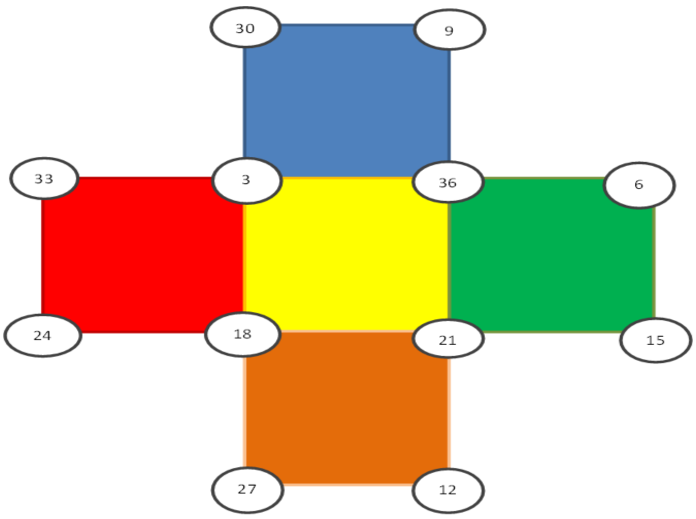
Solución 10.



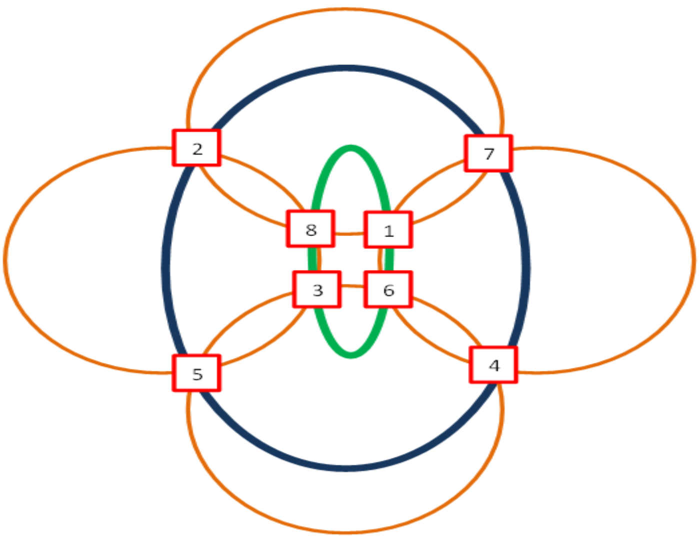
Solución 11.



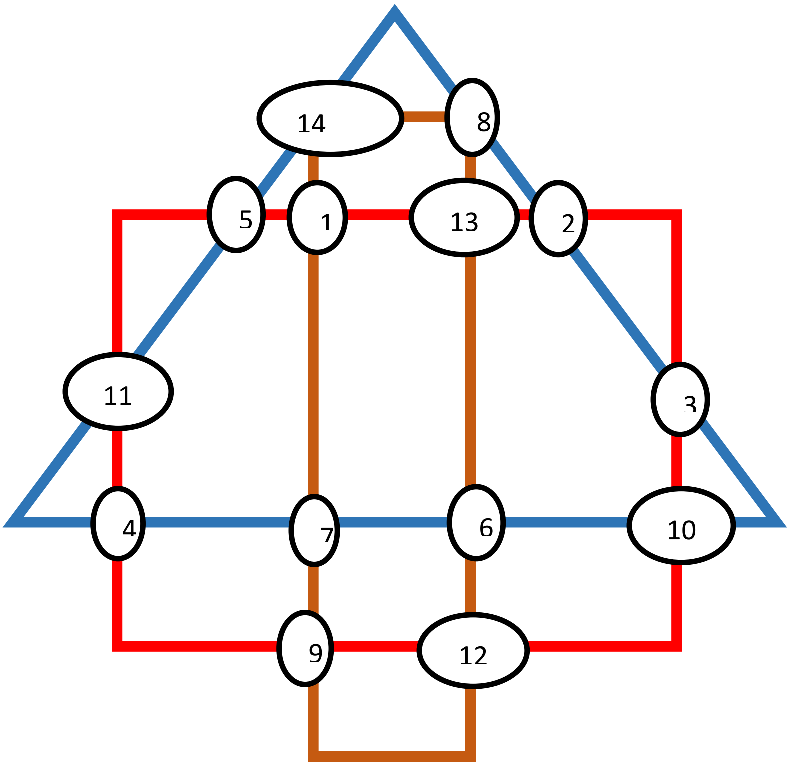
Solución 12



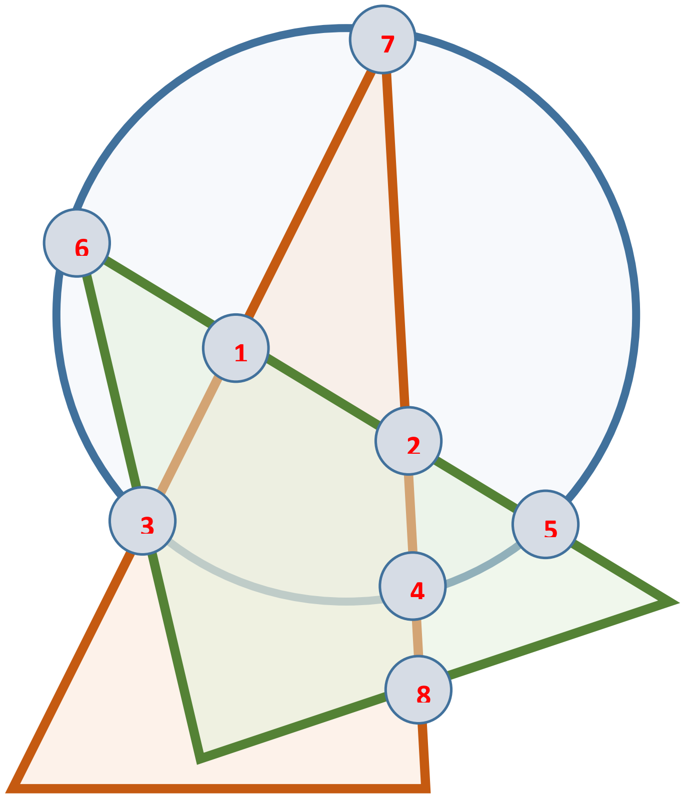
Solución 13.



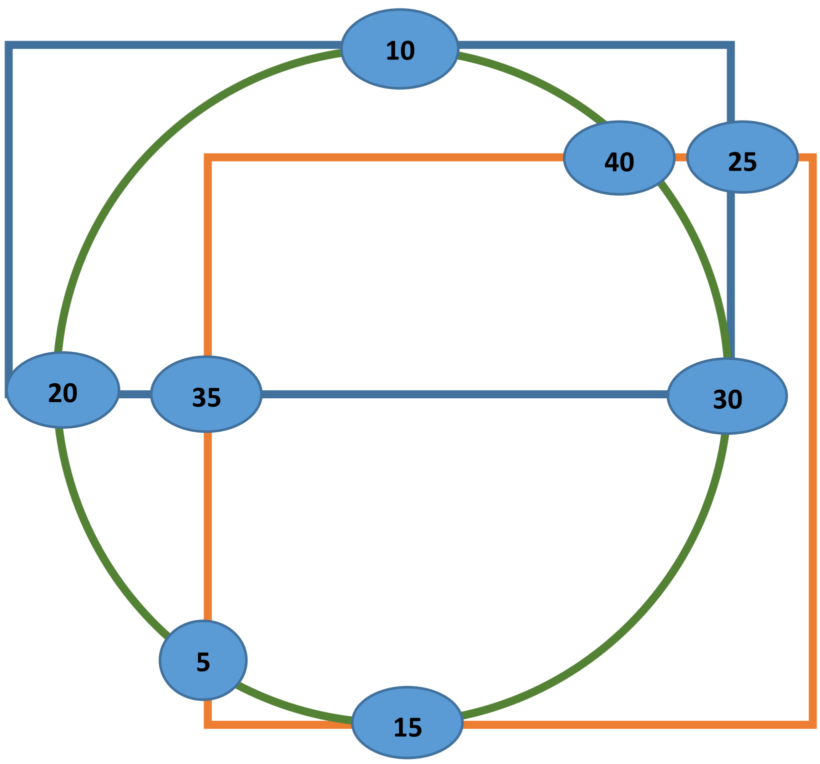
Solución 14



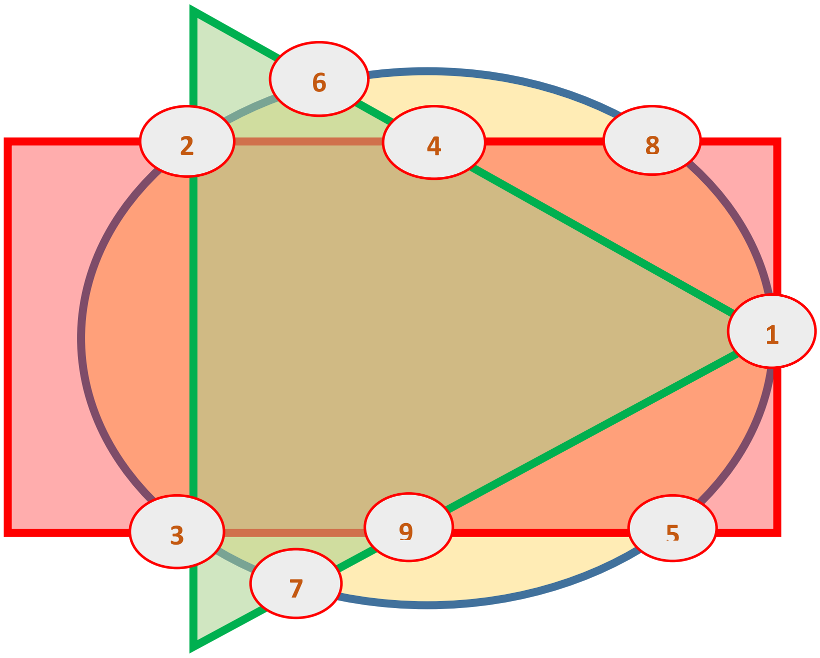
Solución 15



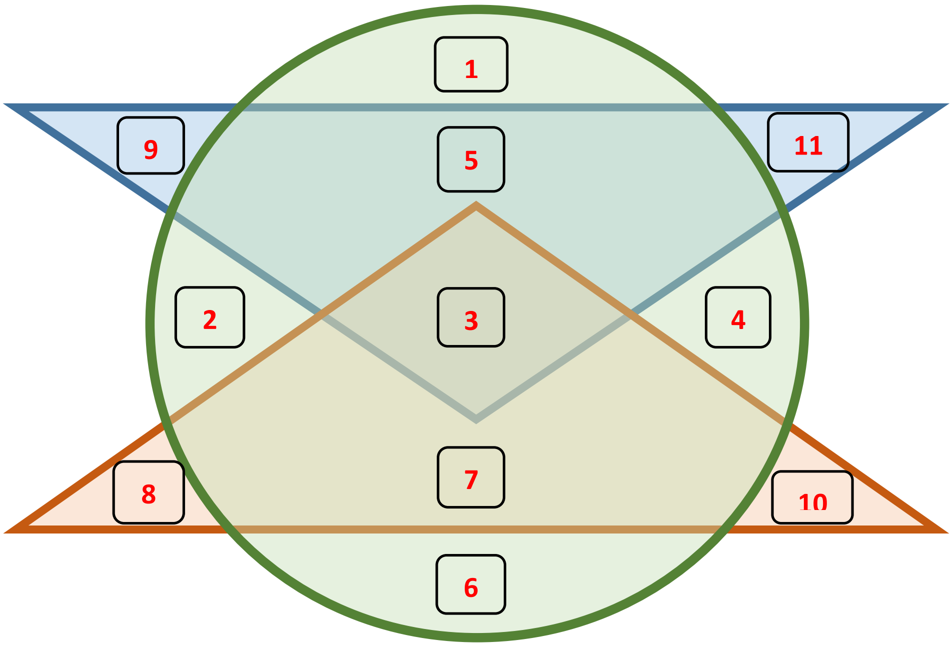
Solución 16.



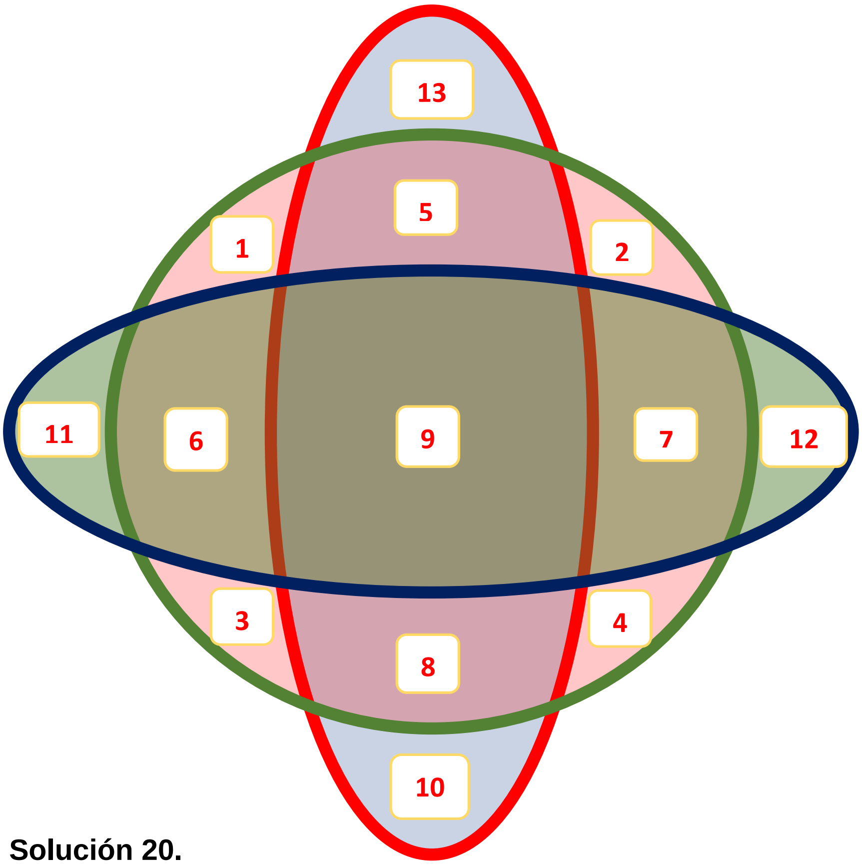
Solución 17.



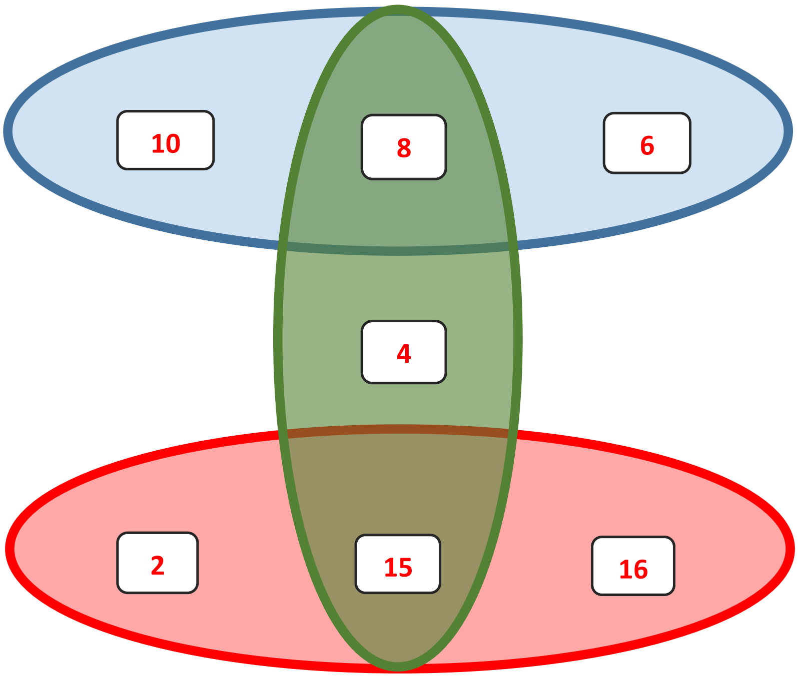
Solución 18.



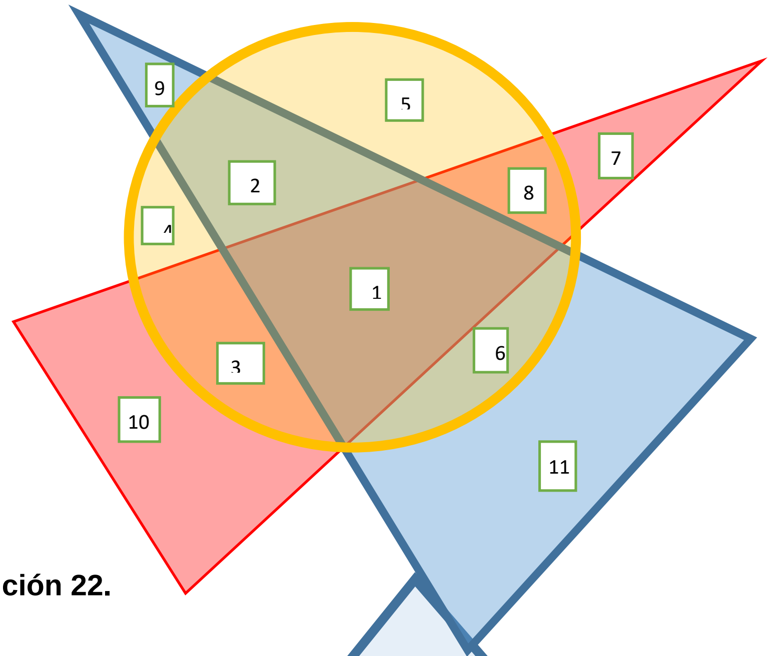
Solución 19.



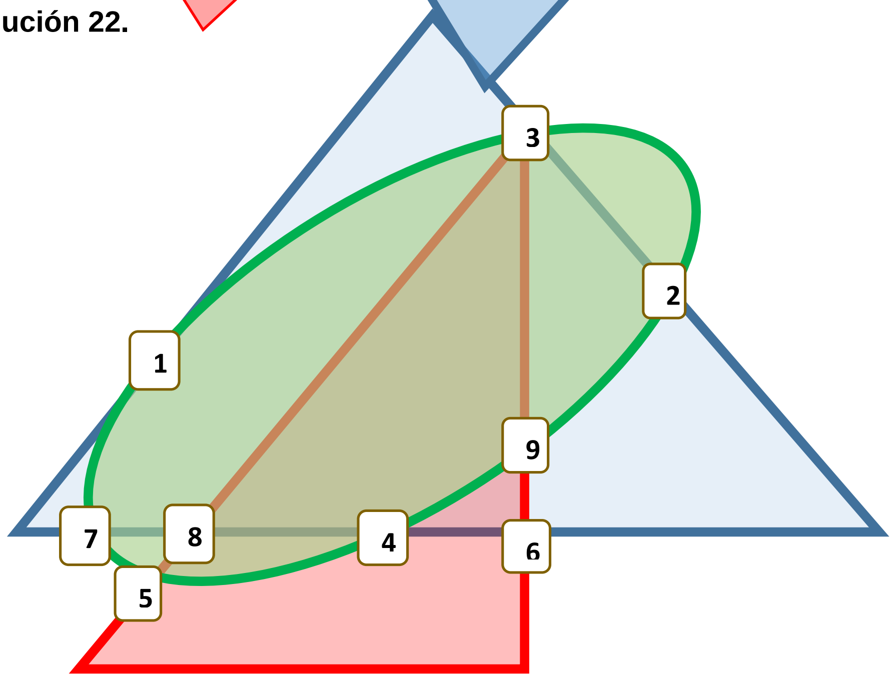
Solución 20.



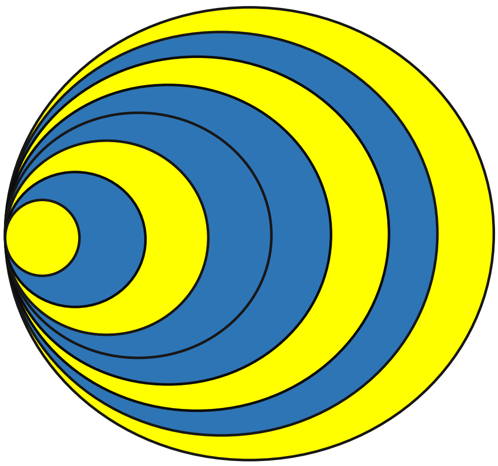
Solución 21.



Solución 22.



Solución 23.



$F1 = 64\ \pi U^2 - 49\ \pi U^2 = 15\ \pi U^2.$

$F2 = 49\ \pi U^2 - 36\ \pi U^2 = 13\ \pi U^2.$

$F3 = 36\ \pi U^2 - 25\ \pi U^2 = 11\ \pi U^2.$

$F4 = 25\ \pi U^2 - 16\ \pi U^2 = 9\ \pi U^2.$

$F5 = 16\ \pi U^2 - 9\ \pi U^2 = 7\ \pi U^2.$

$F6 = 9\ \pi U^2 - 4\ \pi U^2 = 5\ \pi U^2.$

$F7 = 4\ \pi U^2 - \pi U^2 = 3\ \pi U^2.$

Por tanto las franjas claras suman 15 πU^2 + 11 πU^2 + 5 πU^2 + πU^2

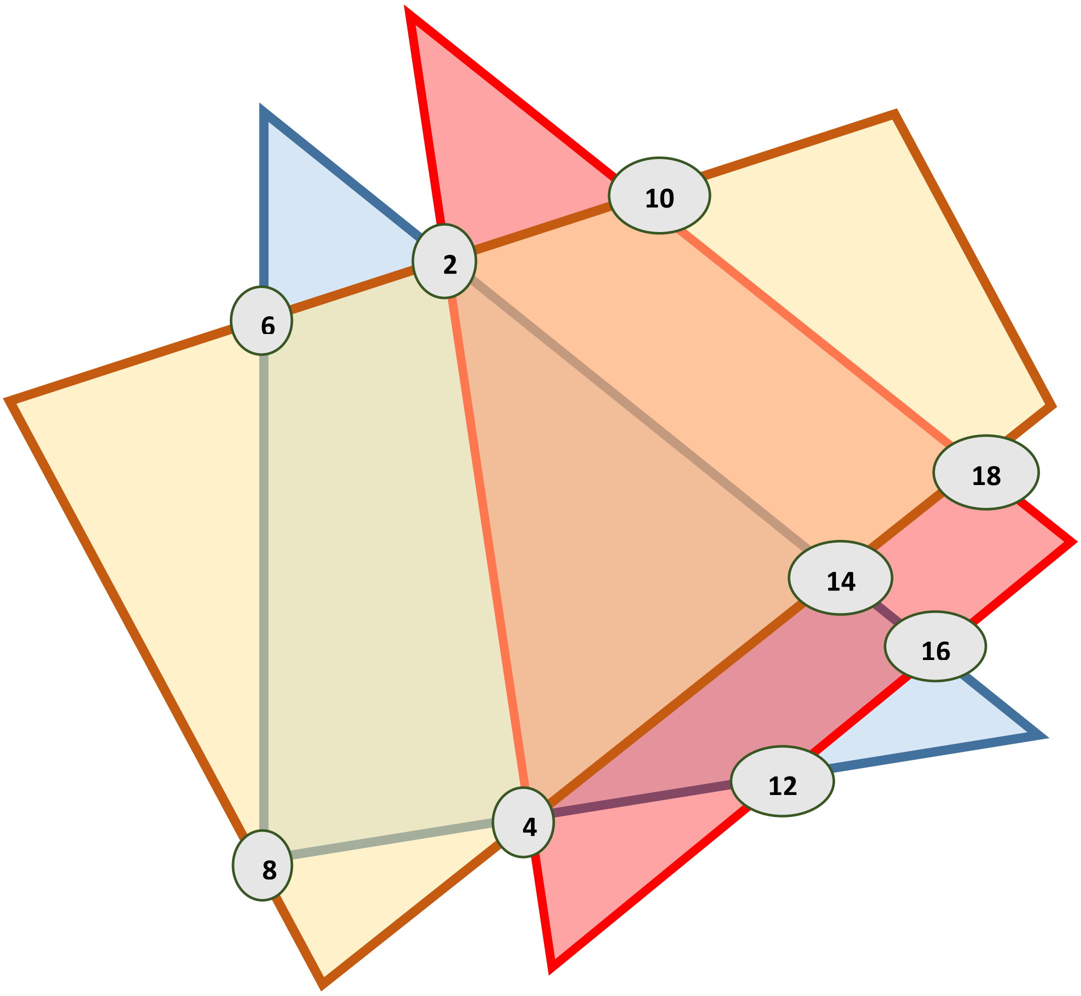
Por tanto suma 32 πU^2

Las franjas obscuras suman 13 πU^2 + 9 πU^2 + 7 πU^2 + 3πU^2

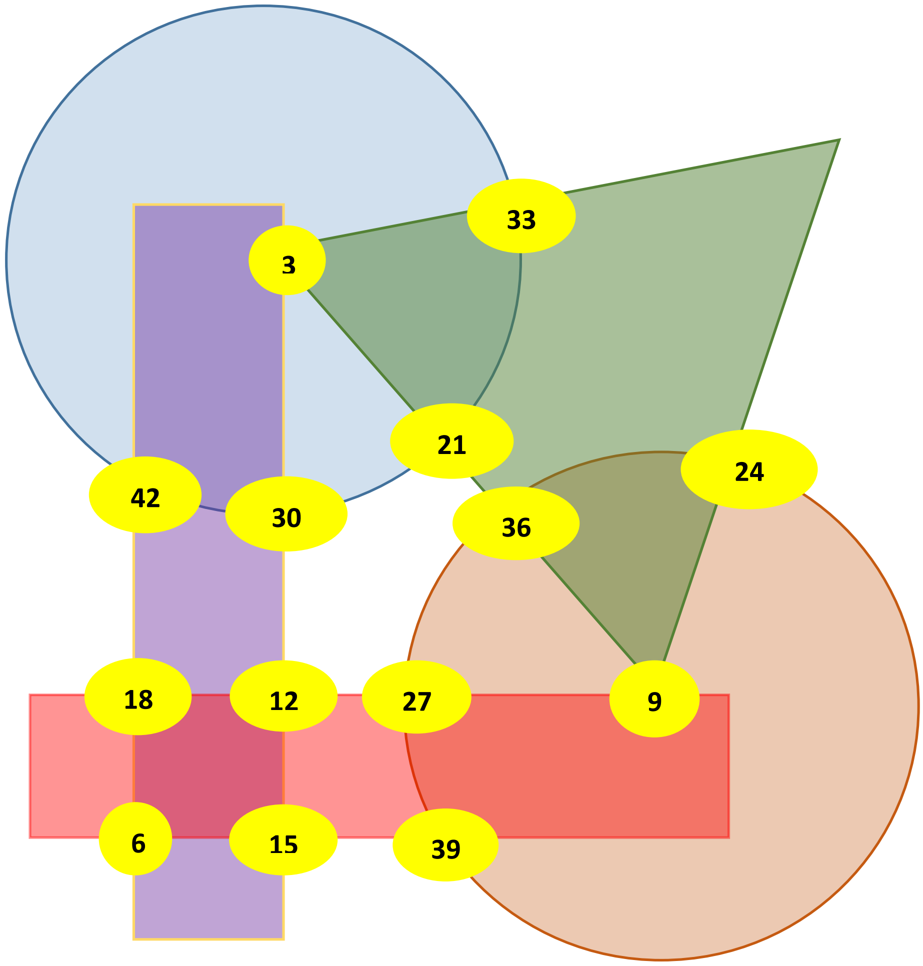
También igual a 32 πU^2

Por tanto la razón entre las sumas clara y obscuras es **$32\pi U^2 / 32\pi U^2 = 1$.**

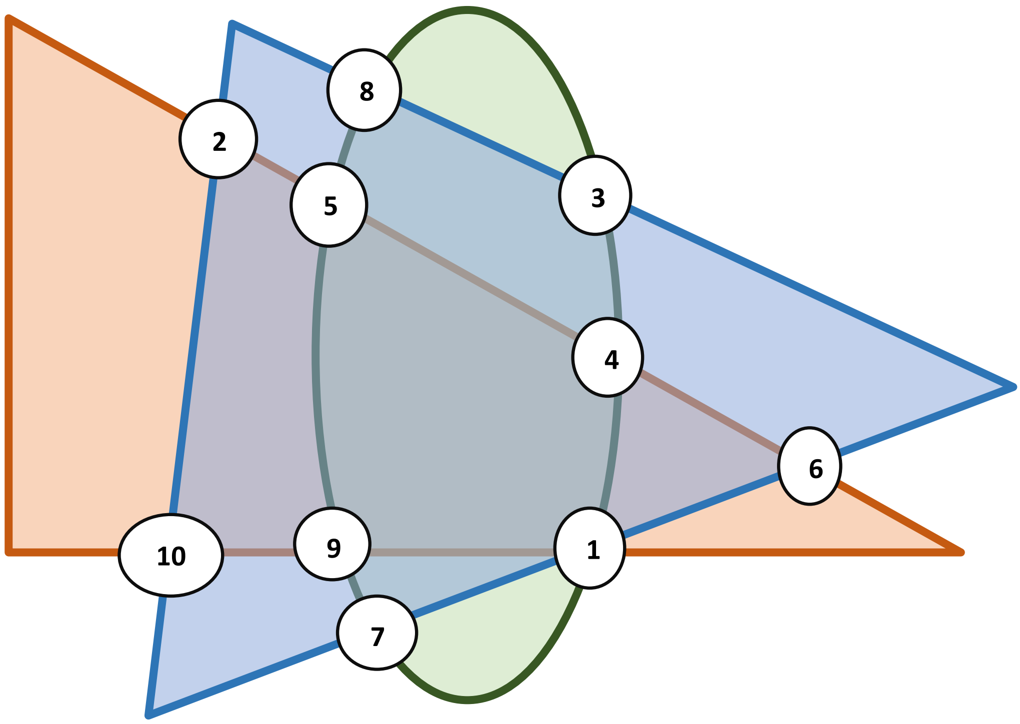
Solución 24.



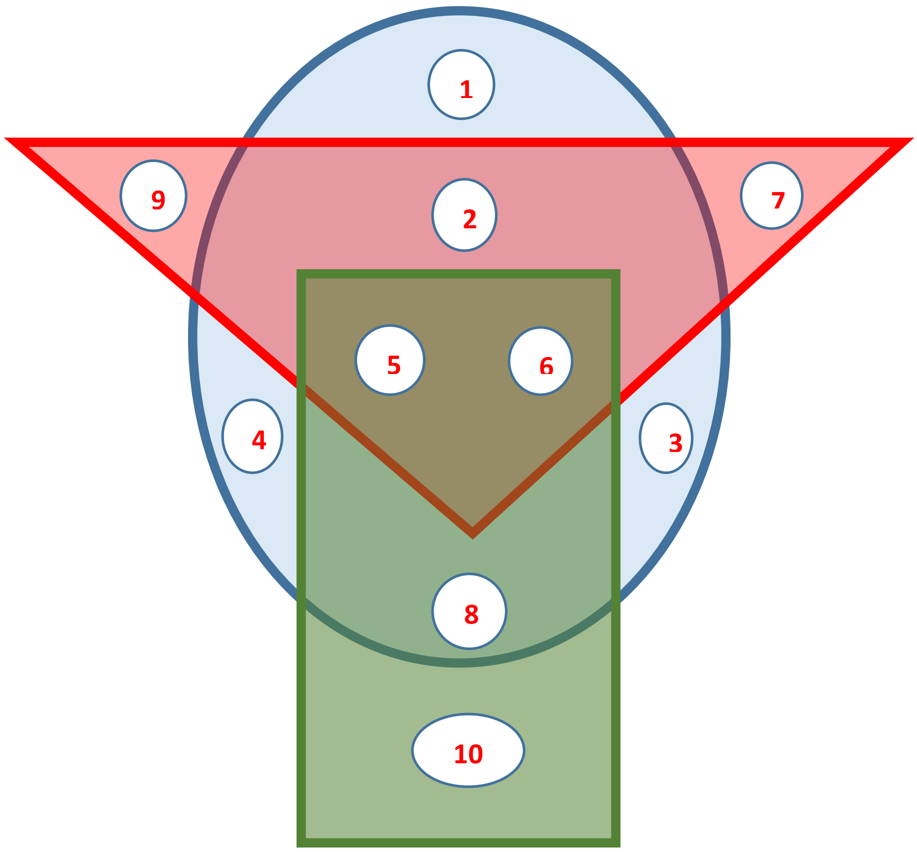
Solución 25.



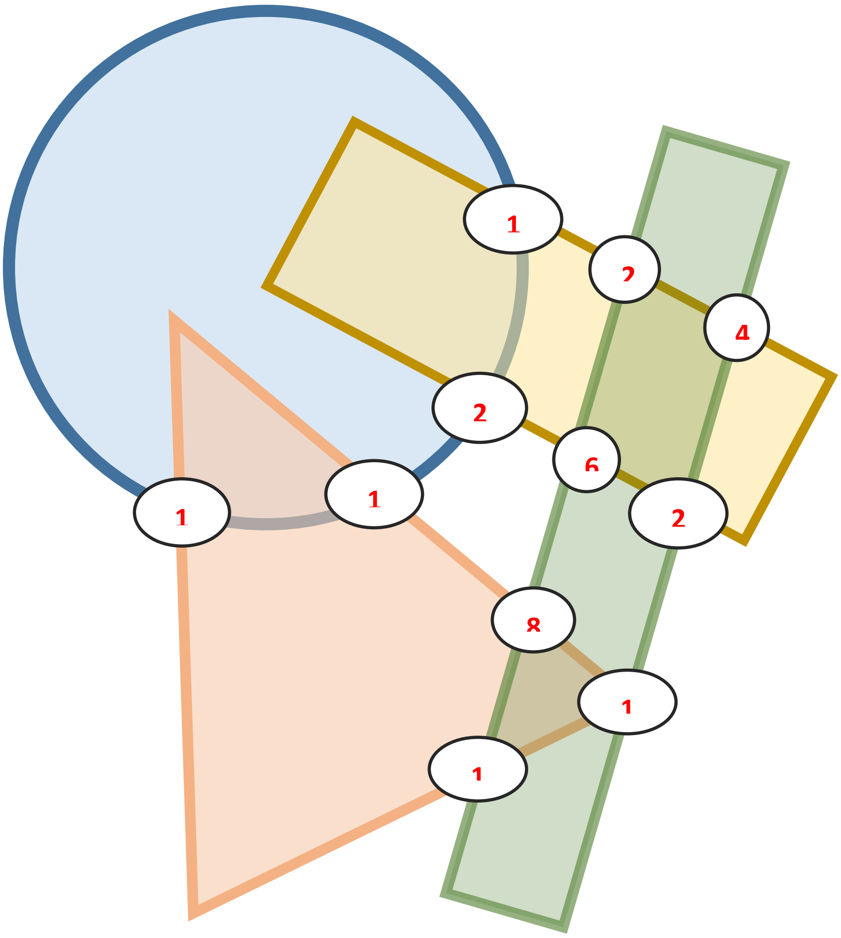
Solución 26.



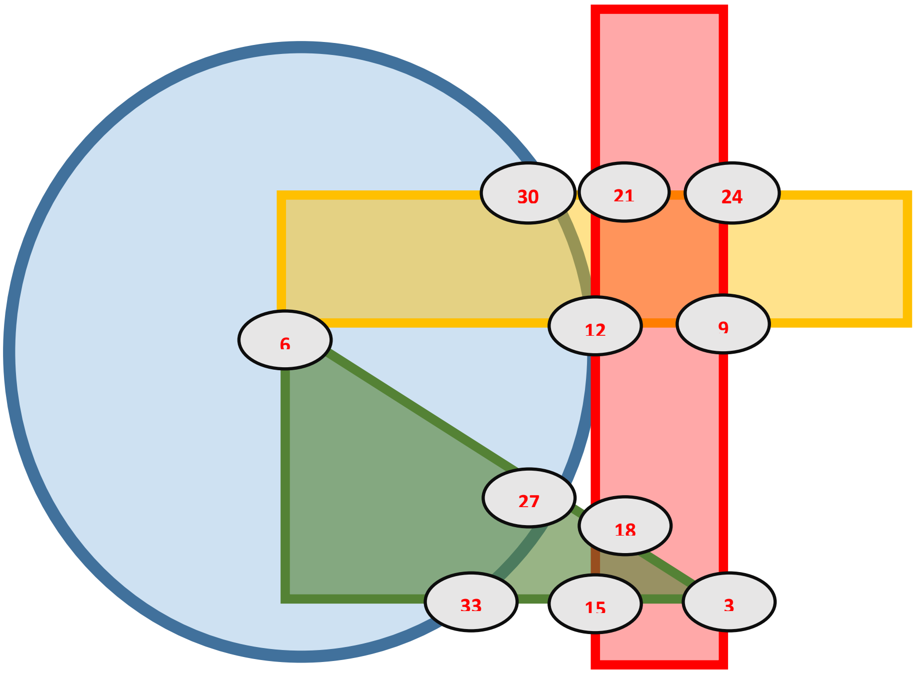
Solución 27.



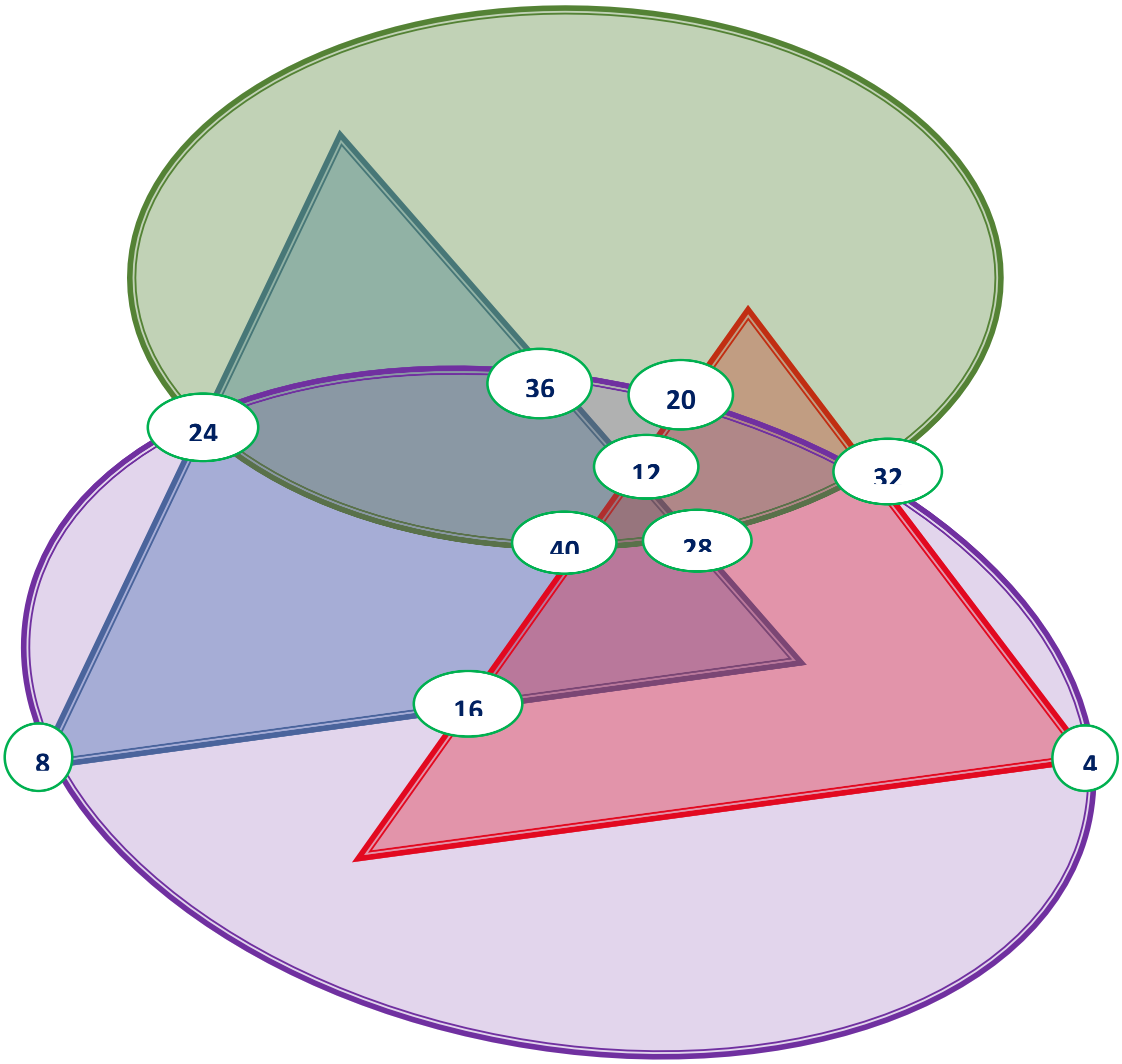
Solución 28.



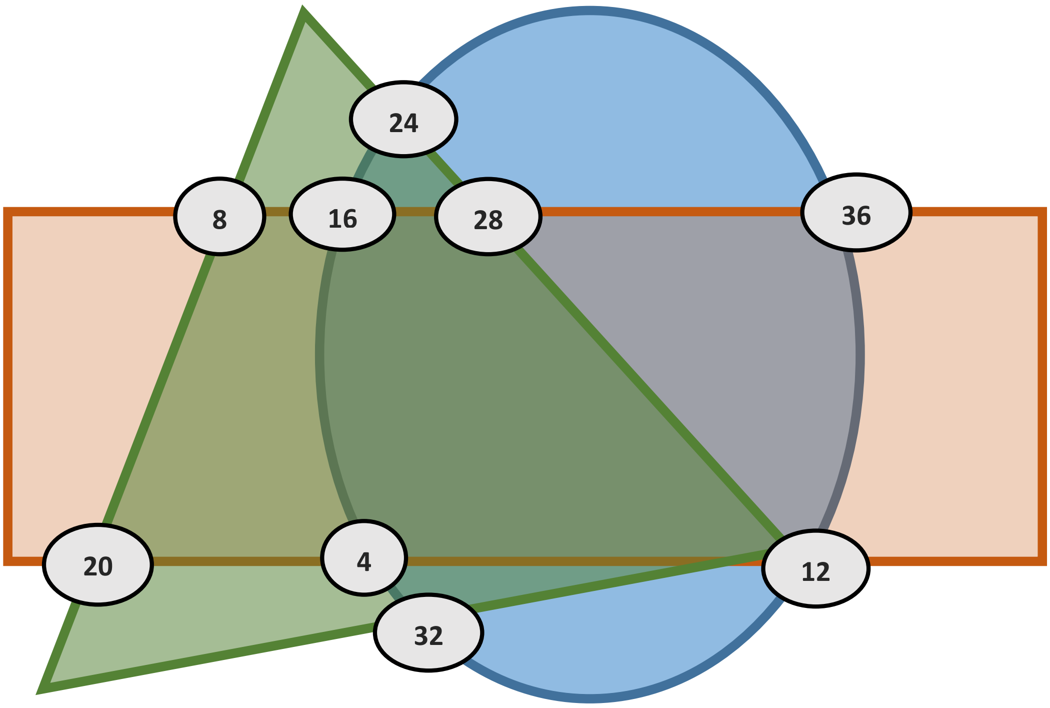
Solución 29.



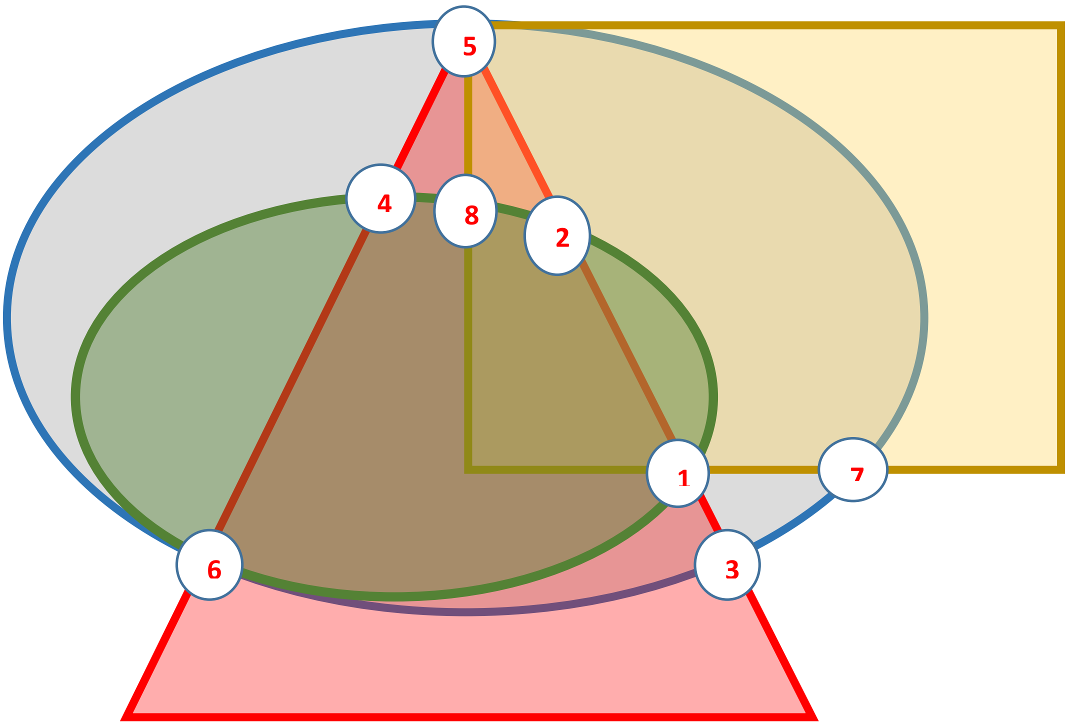
Solución 30.



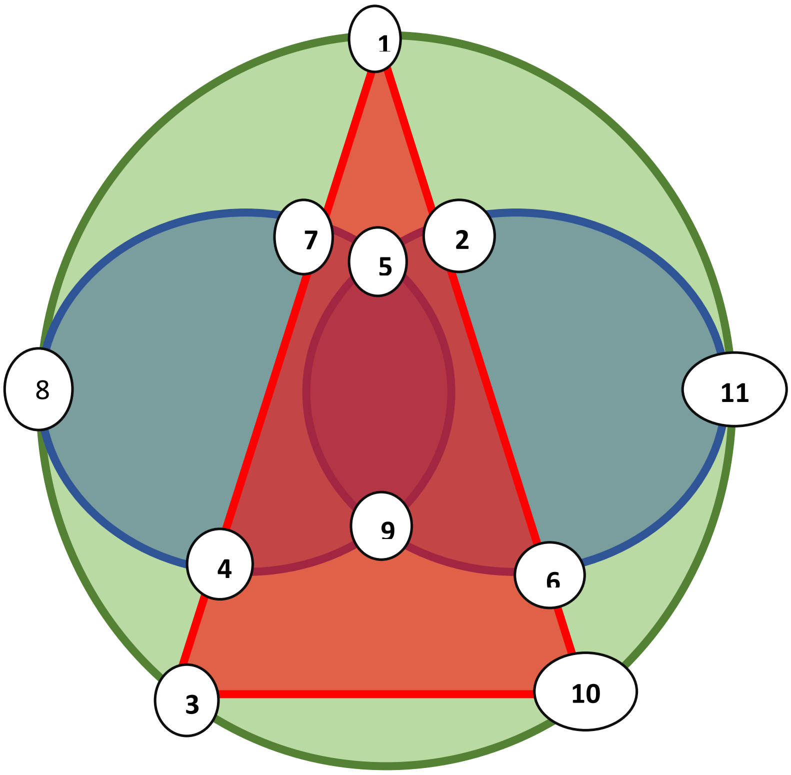
Solución 31.



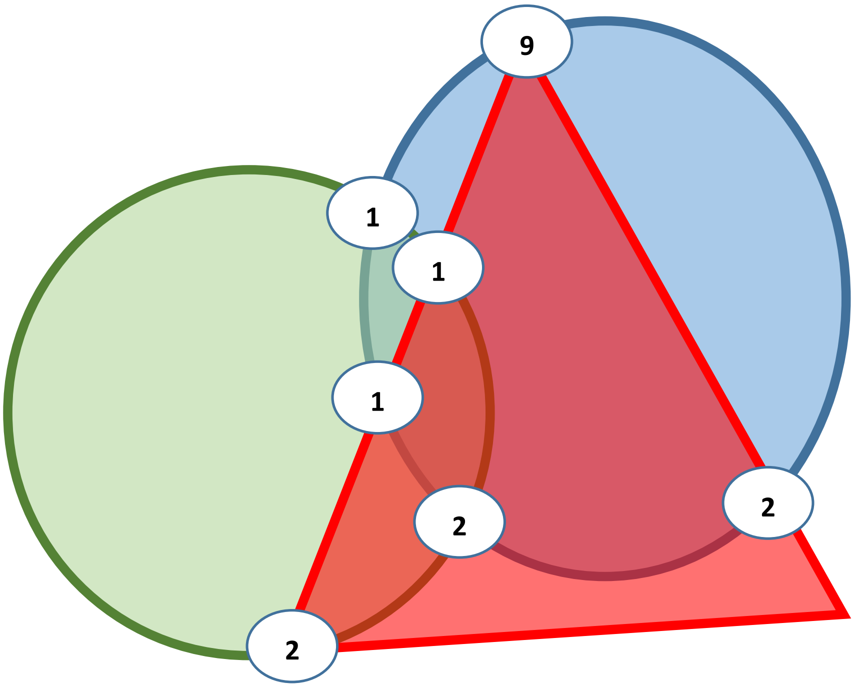
Solución 32.



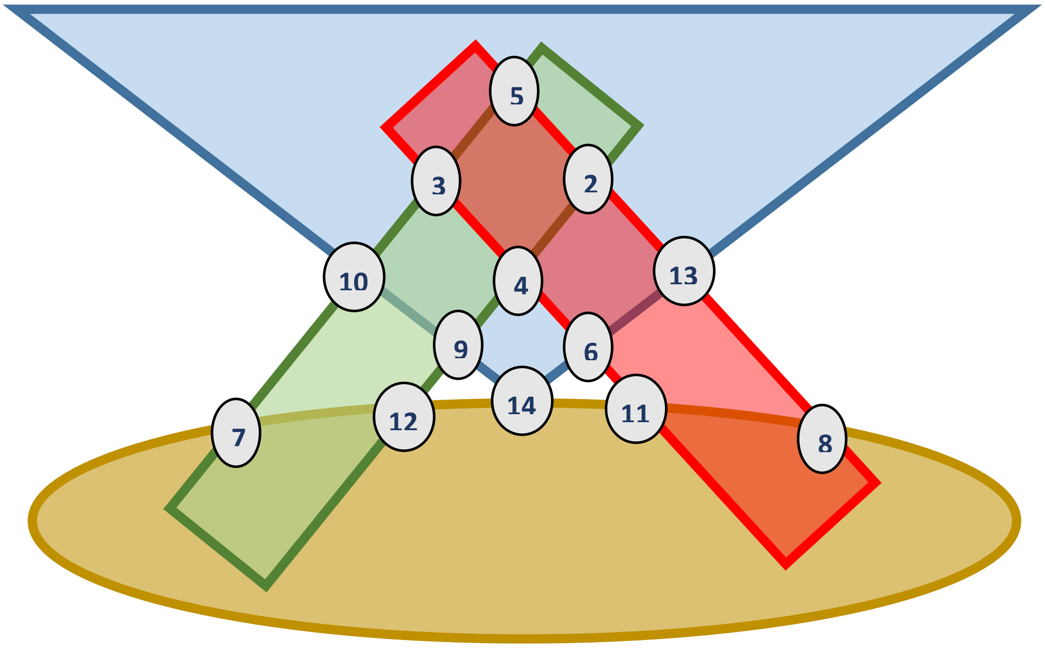
Solución 33.



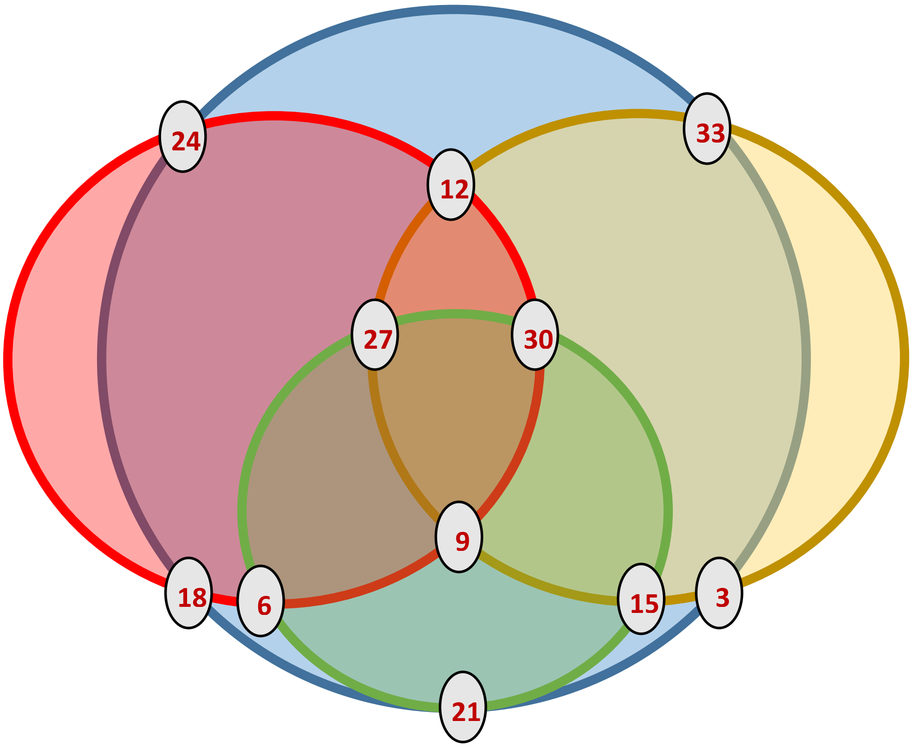
Solución 34.



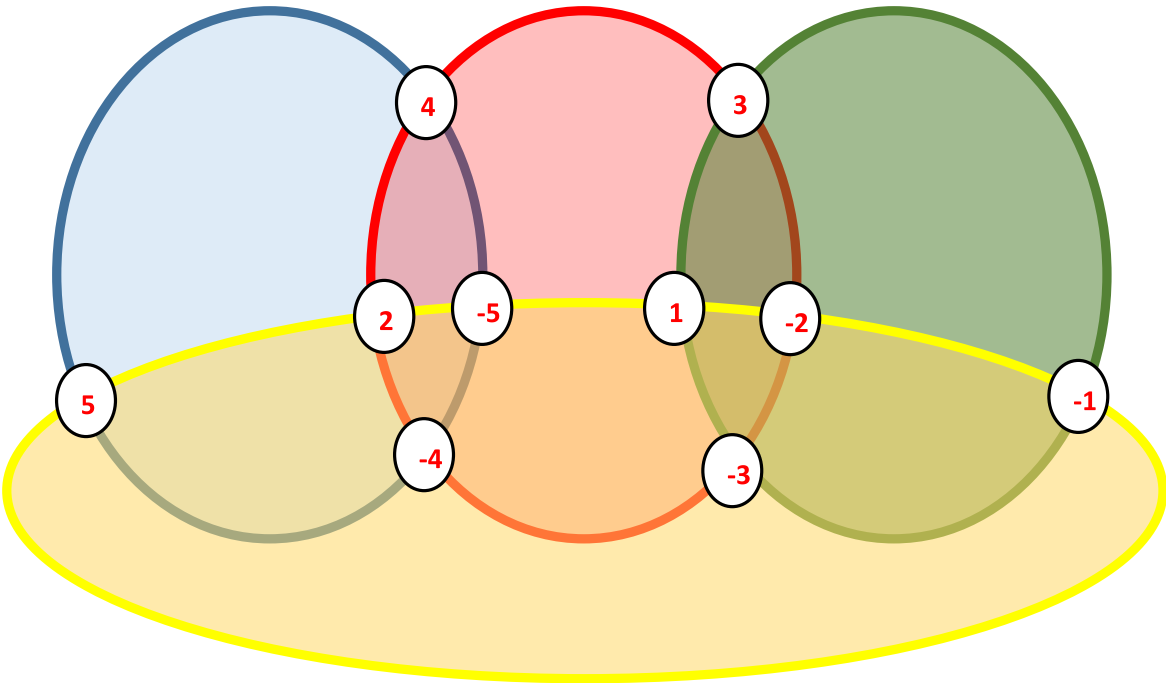
Solución 35.



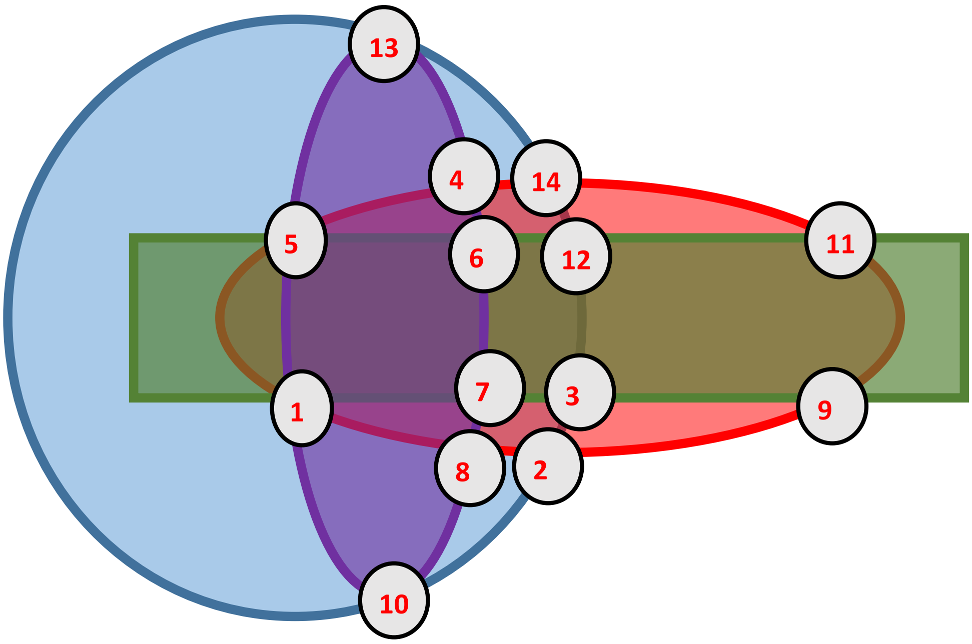
Solución 36.



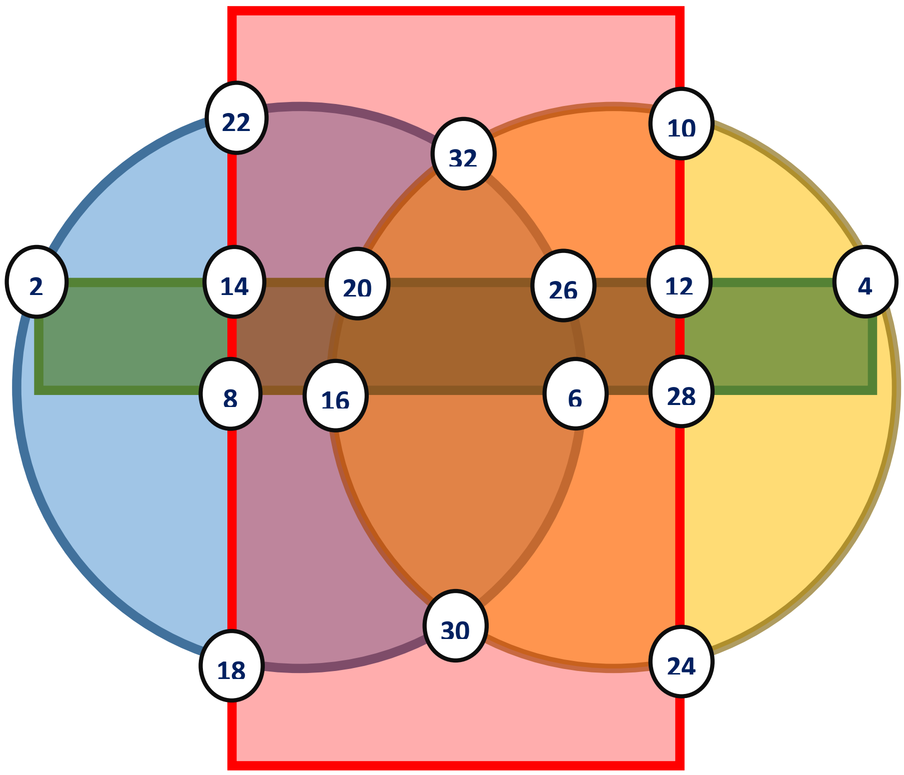
Solución 37.



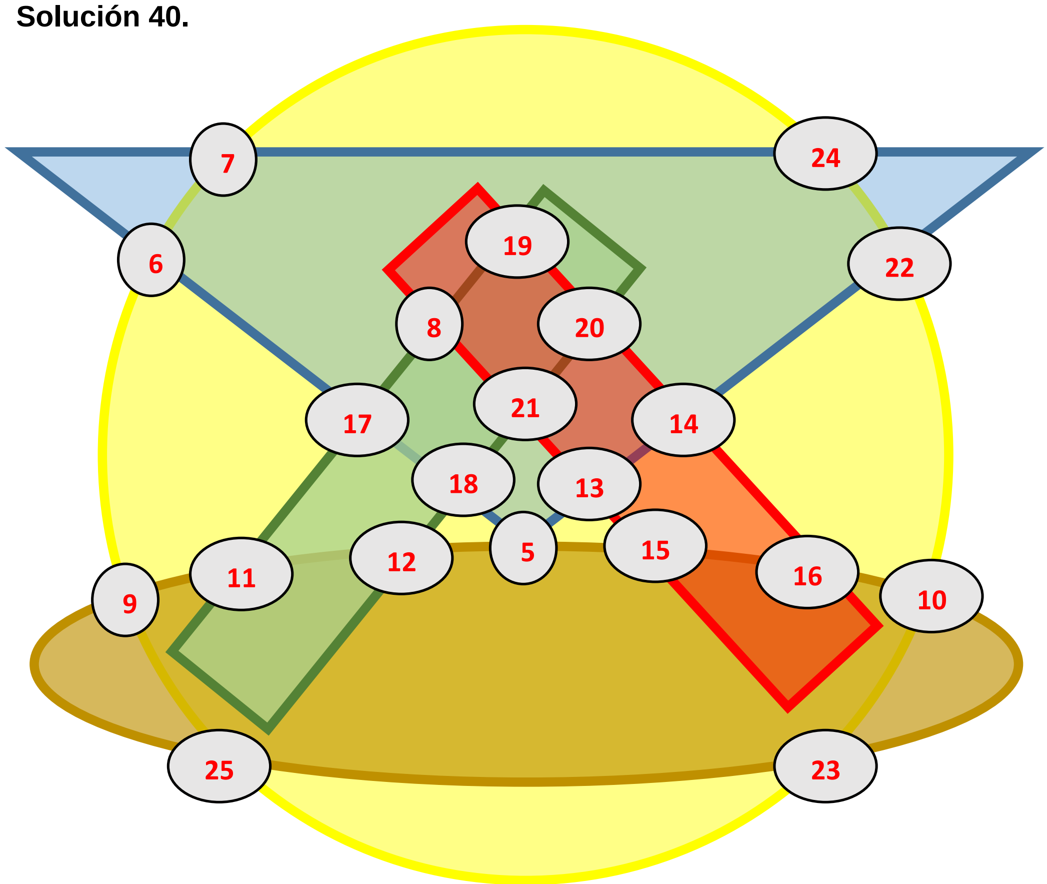
Solución 38



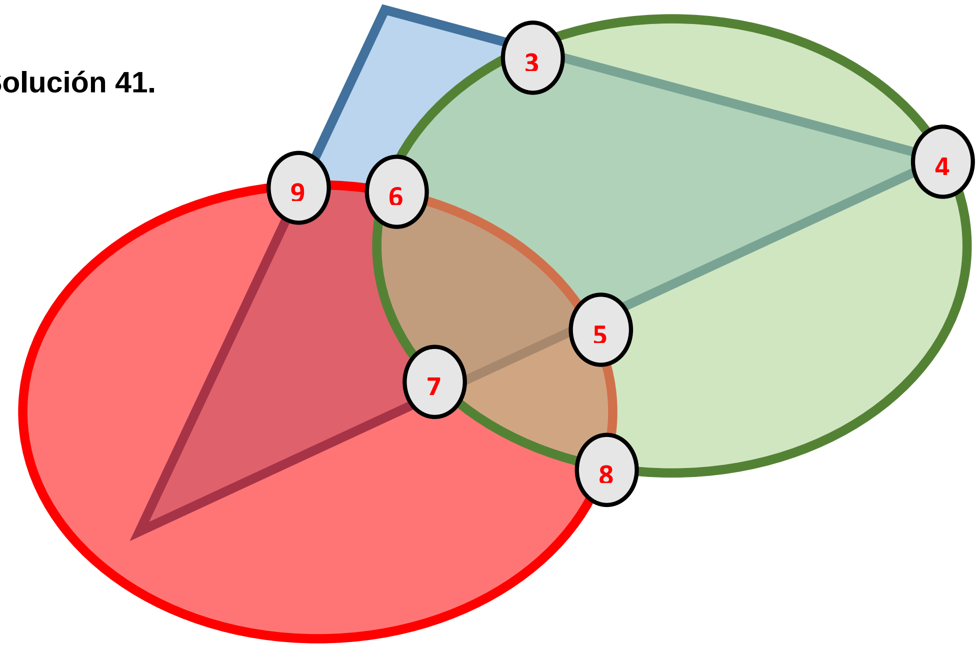
Solución 39.



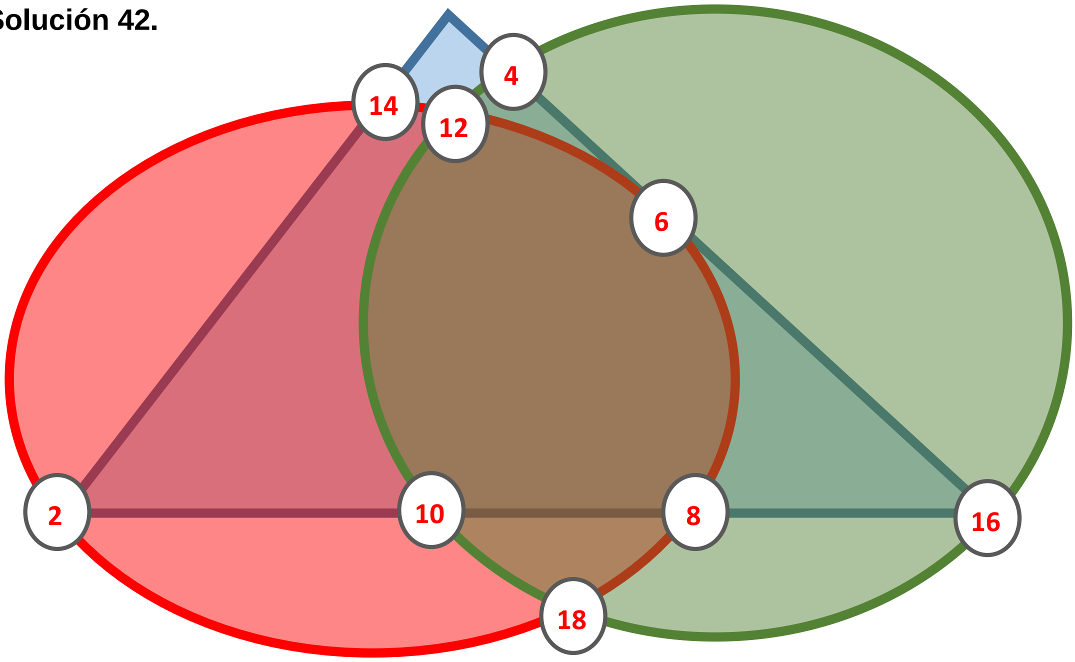
Solución 40.



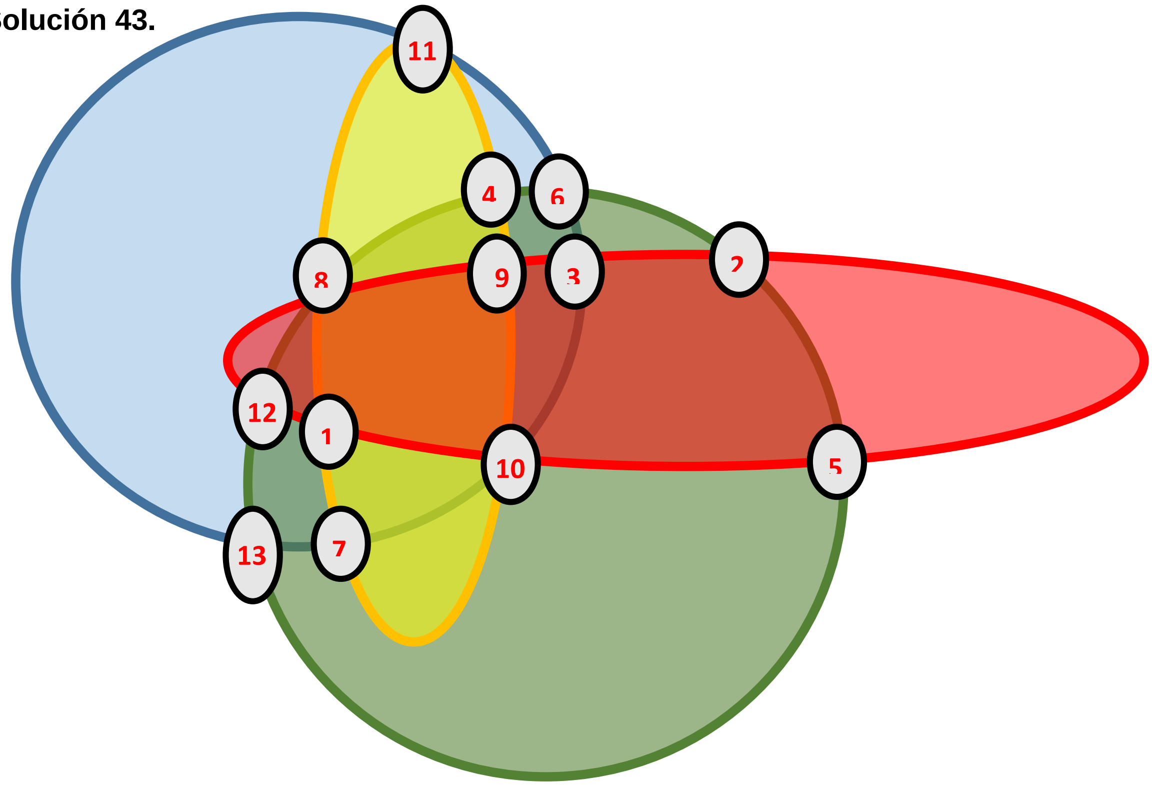
Solución 41.



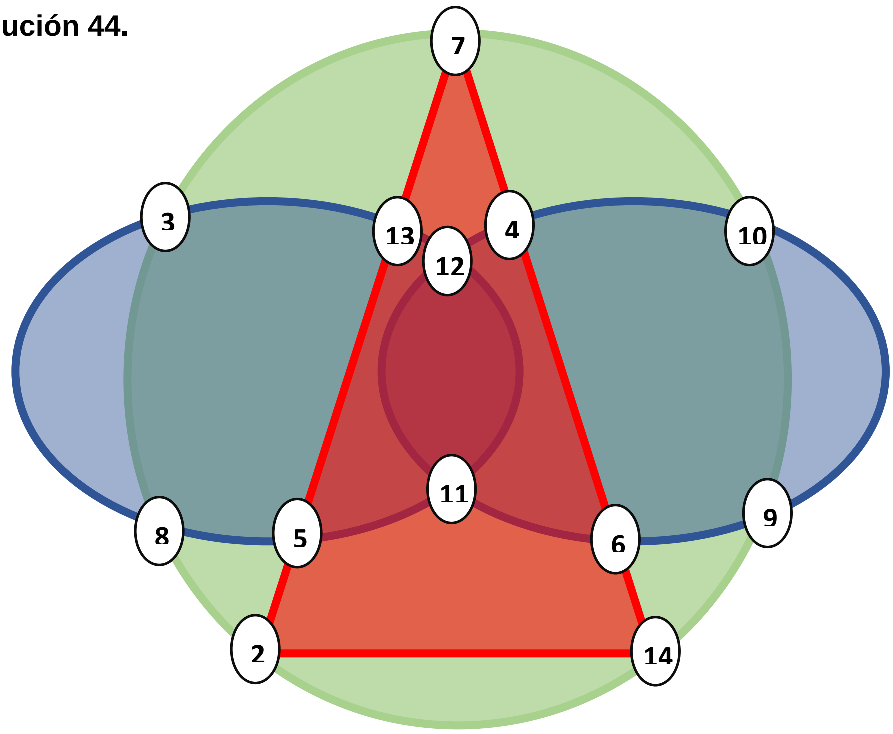
Solución 42.



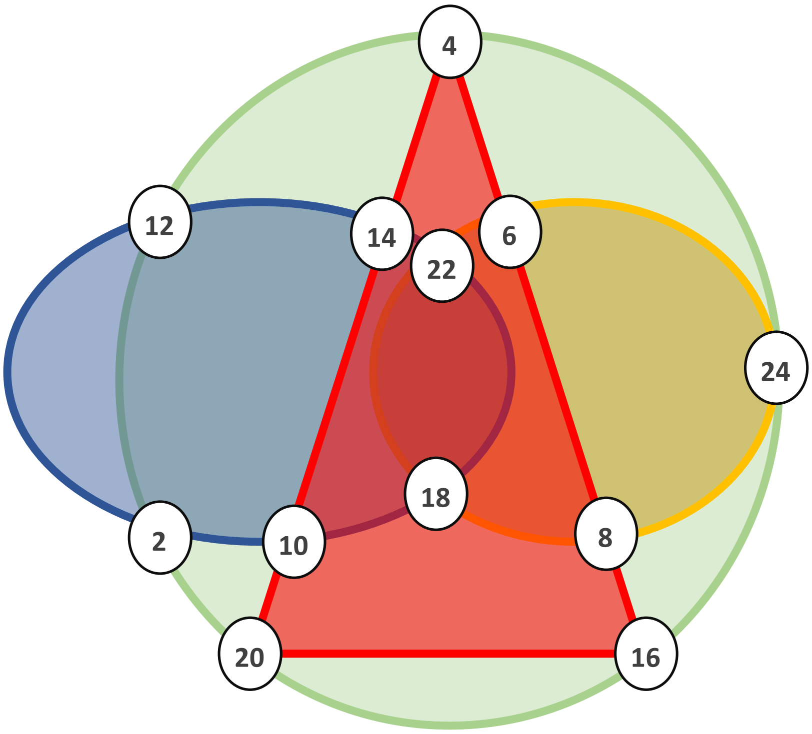
Solución 43.



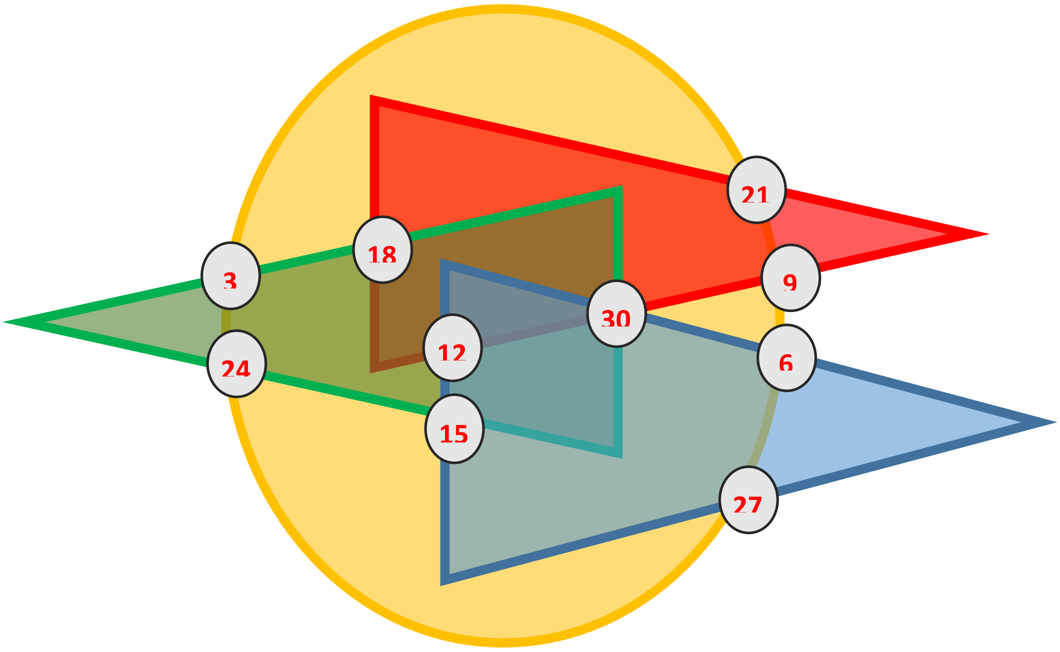
Solución 44.



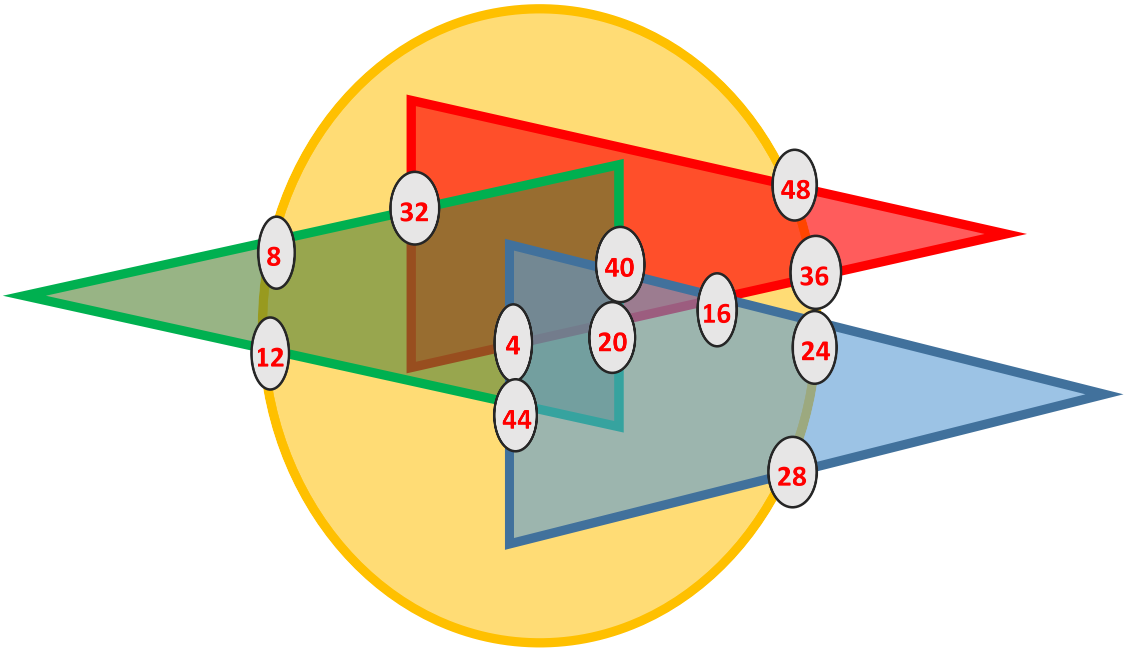
Solución 45.



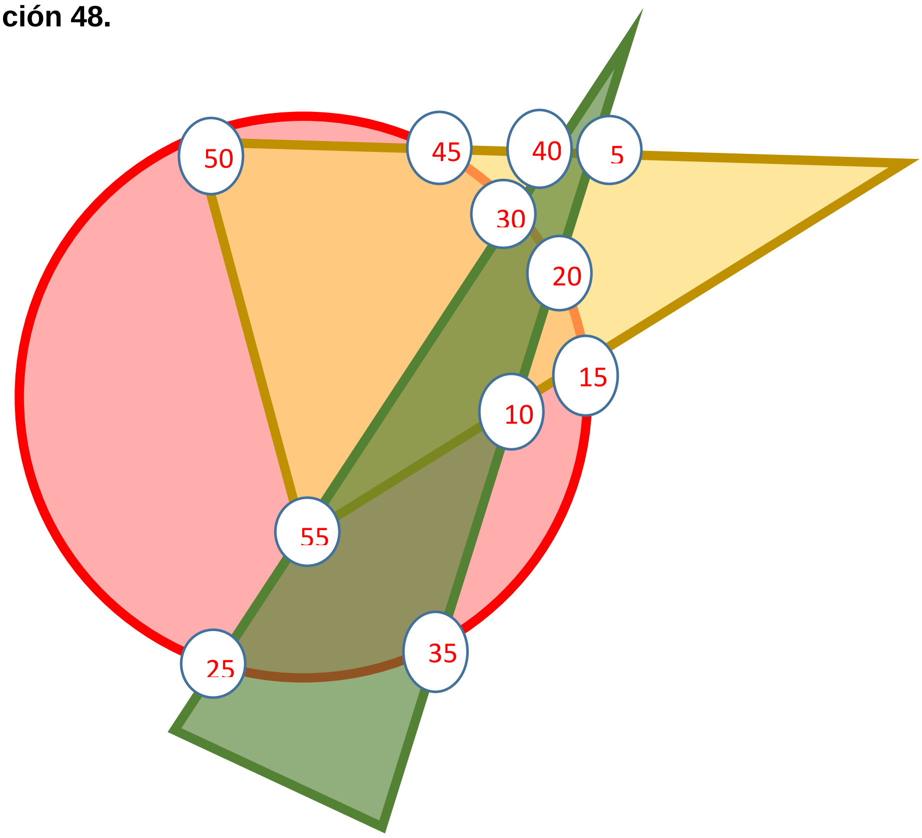
Solución 46.



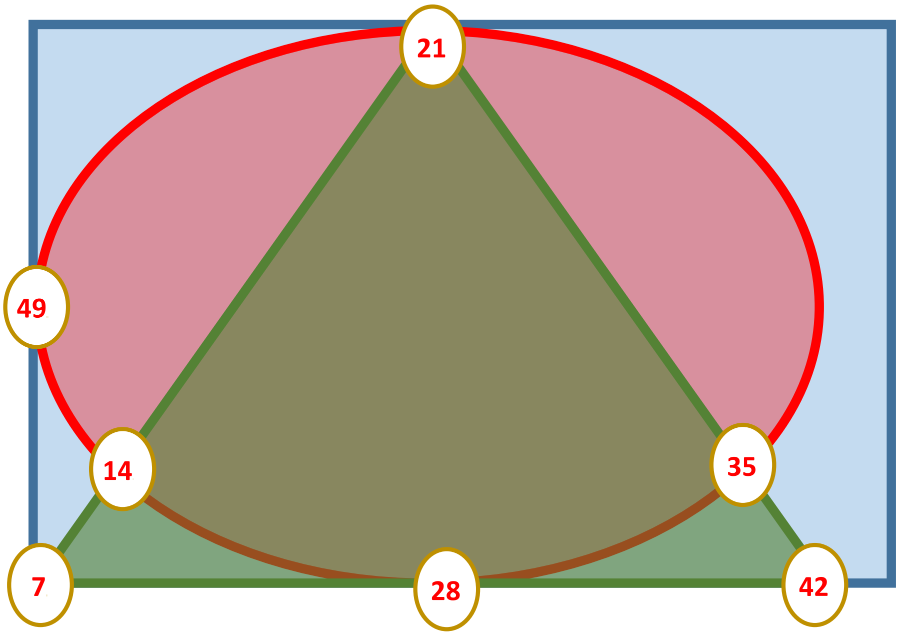
Solución 47.



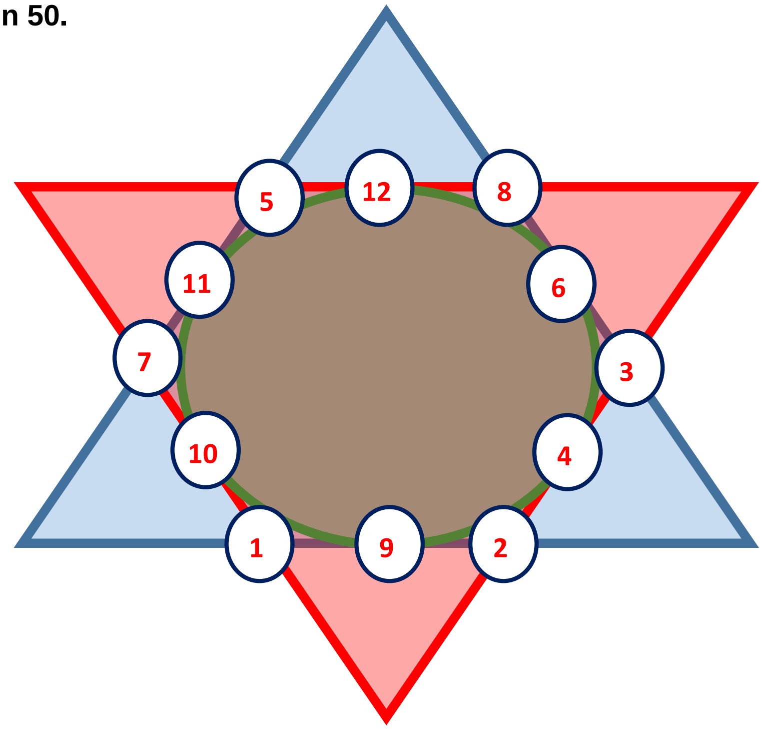
Solución 48.



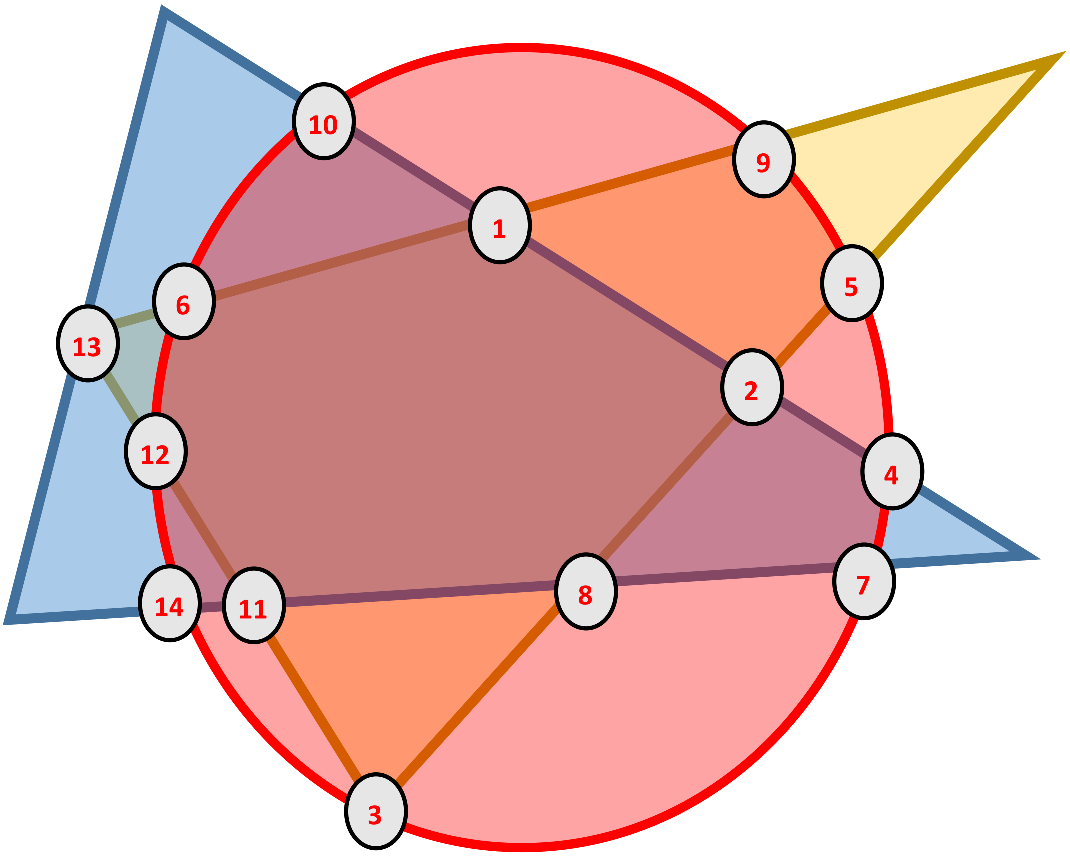
Solución 49



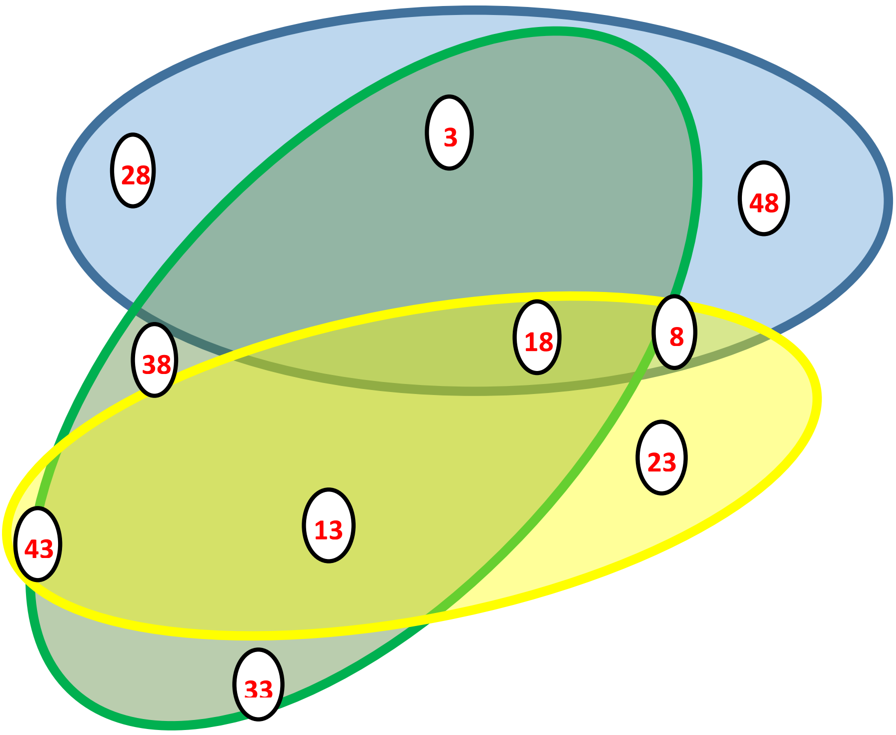
Solución 50.



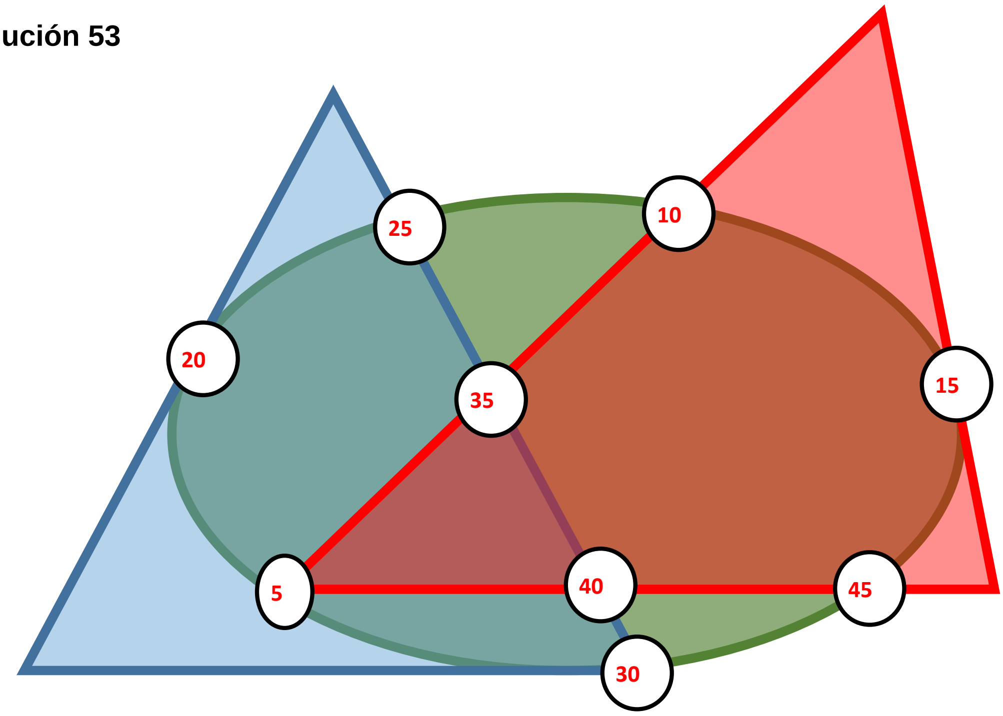
Solución 51.



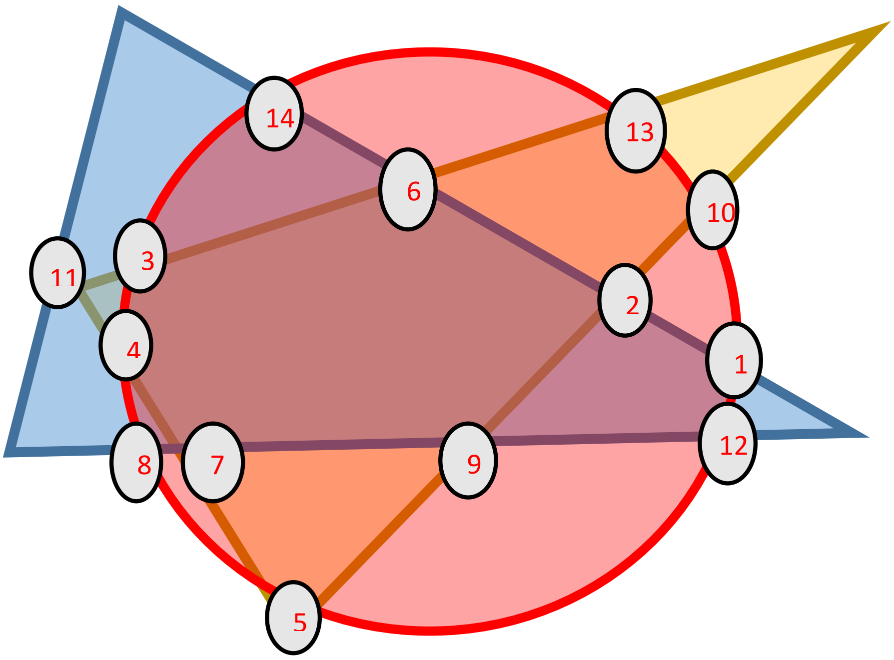
Solución 52.



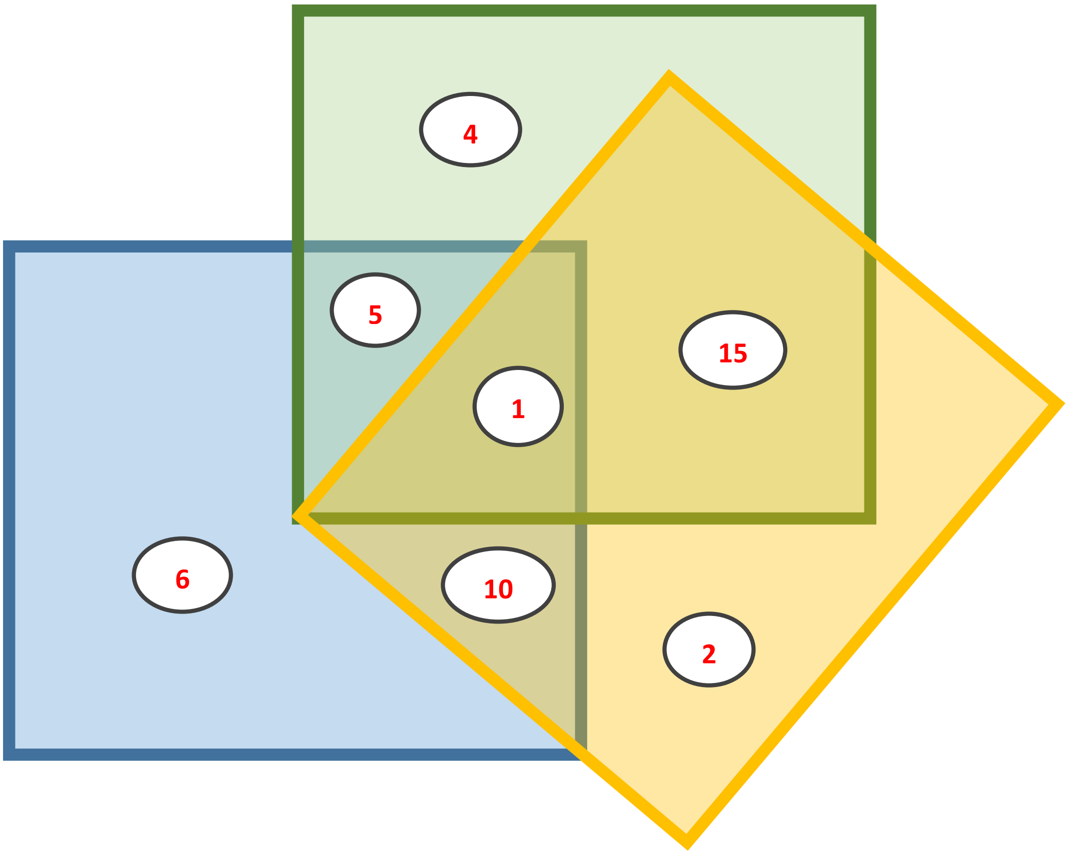
Solución 53



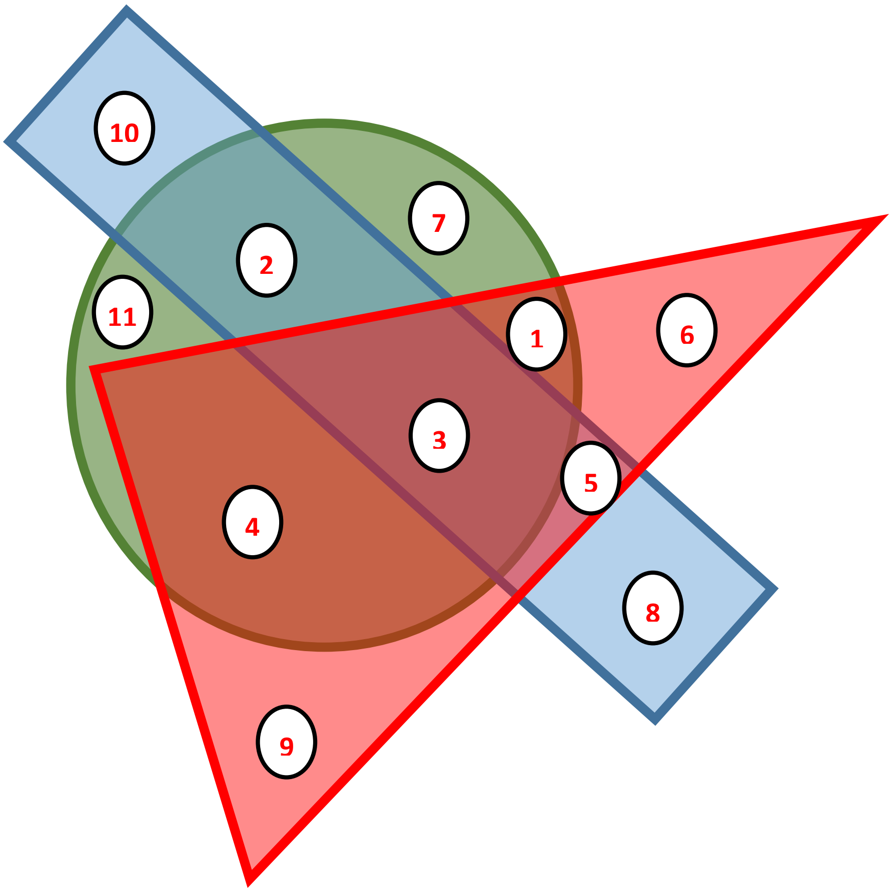
Solución 54.



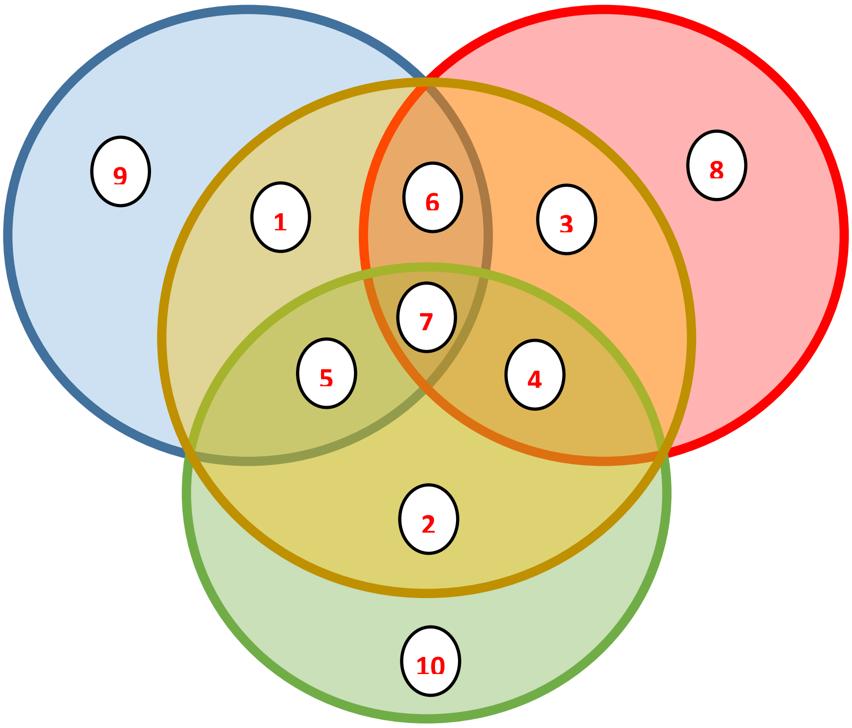
Solución 55.



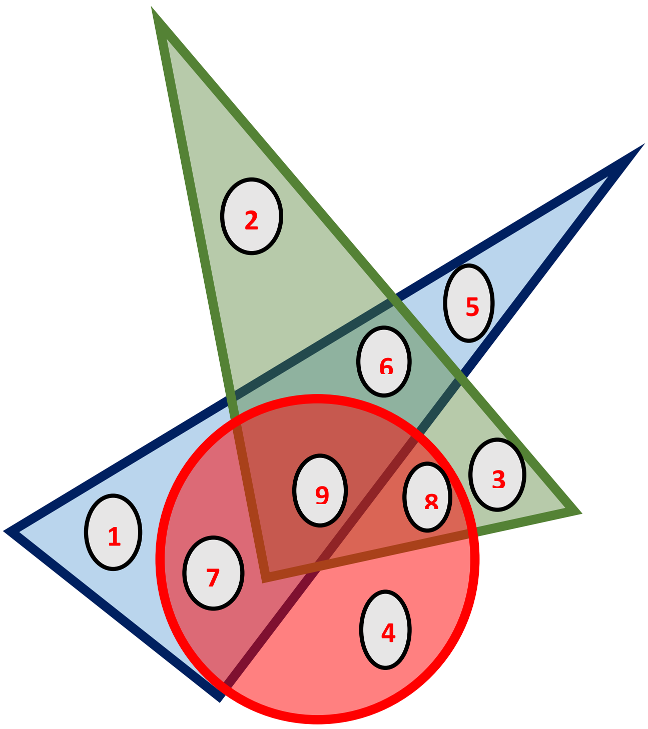
Solución 56.



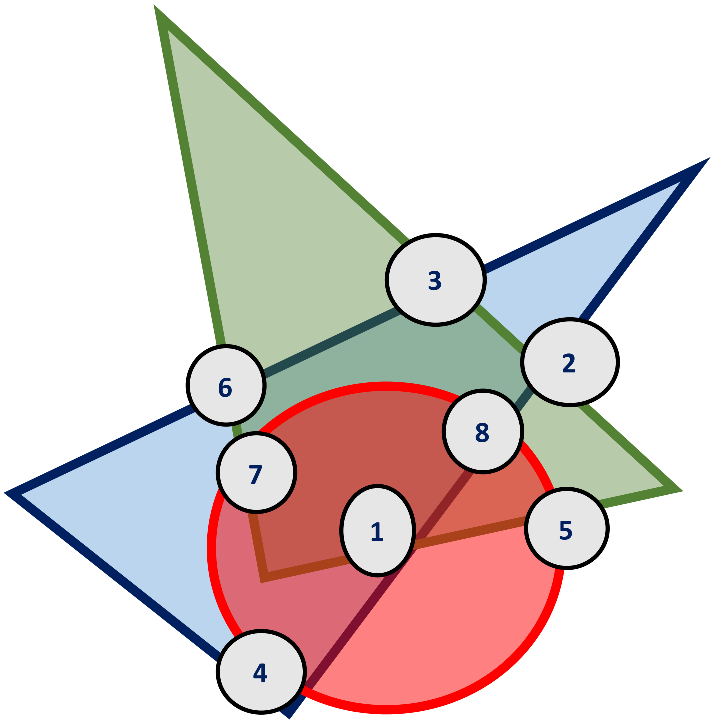
Solución 57.



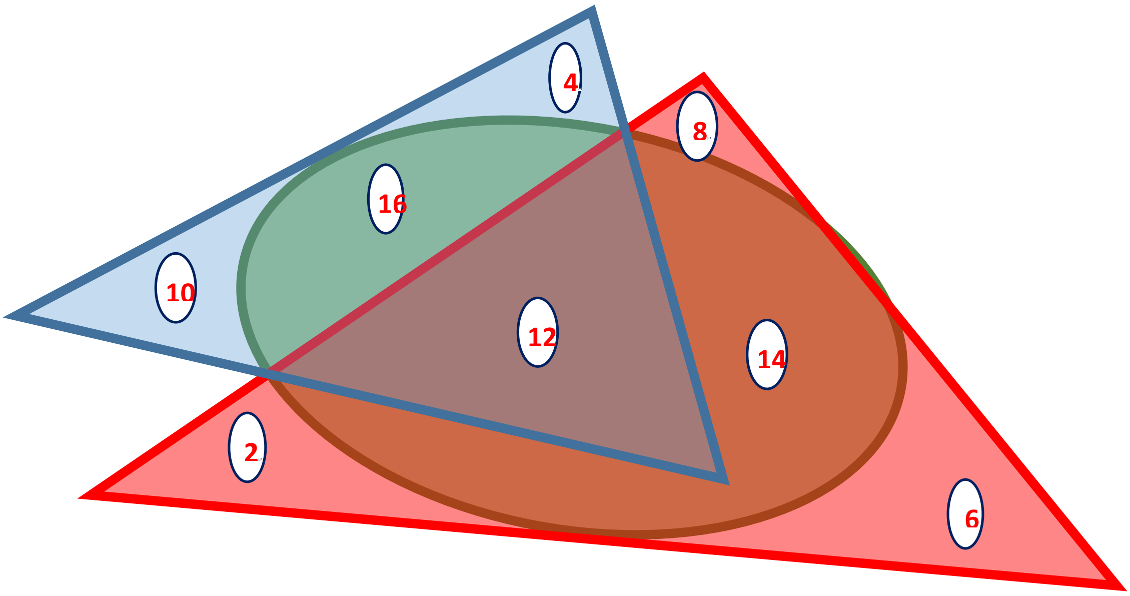
Solución 58



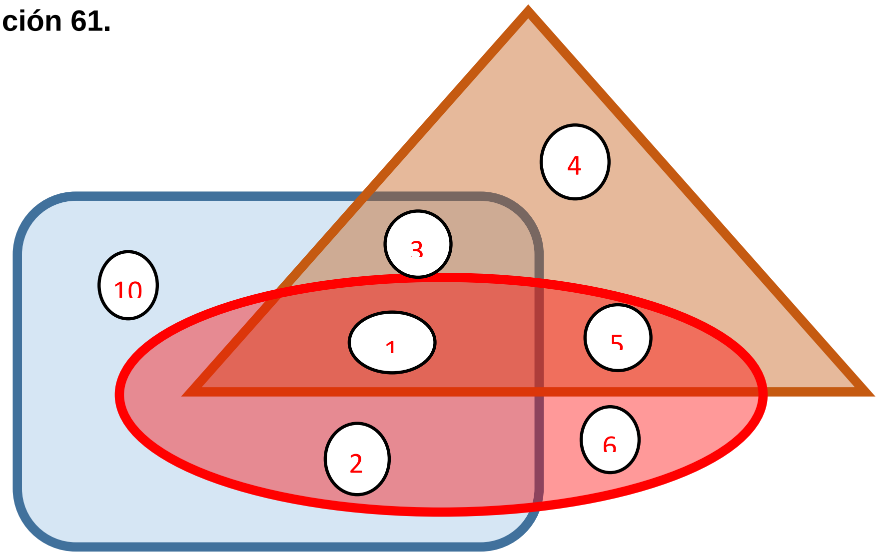
Solución 59.



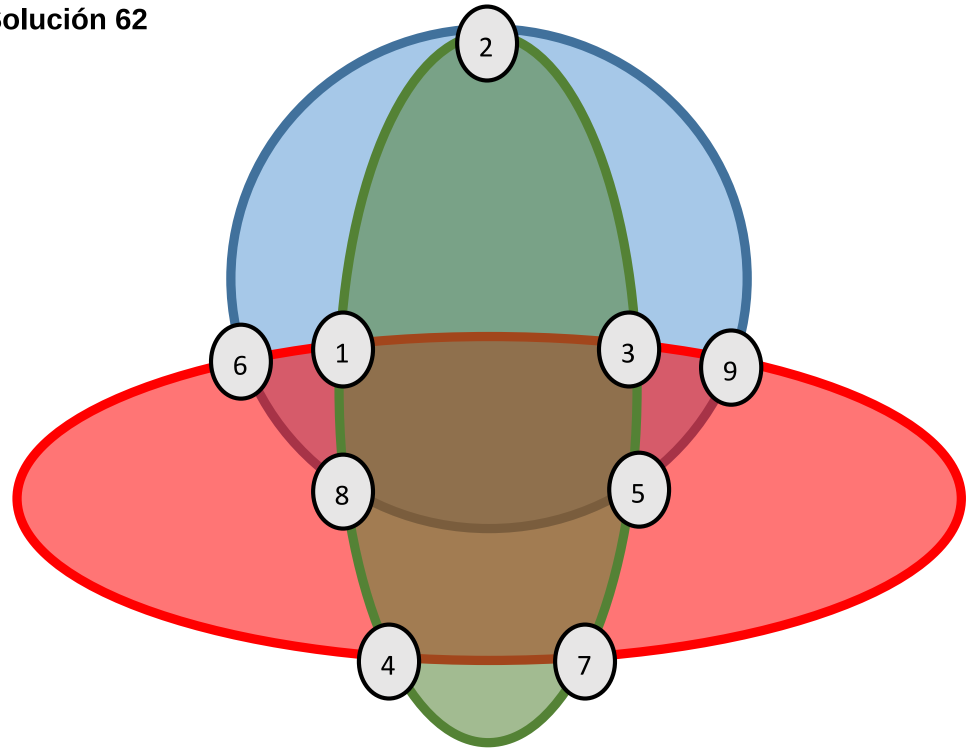
Solución 60.



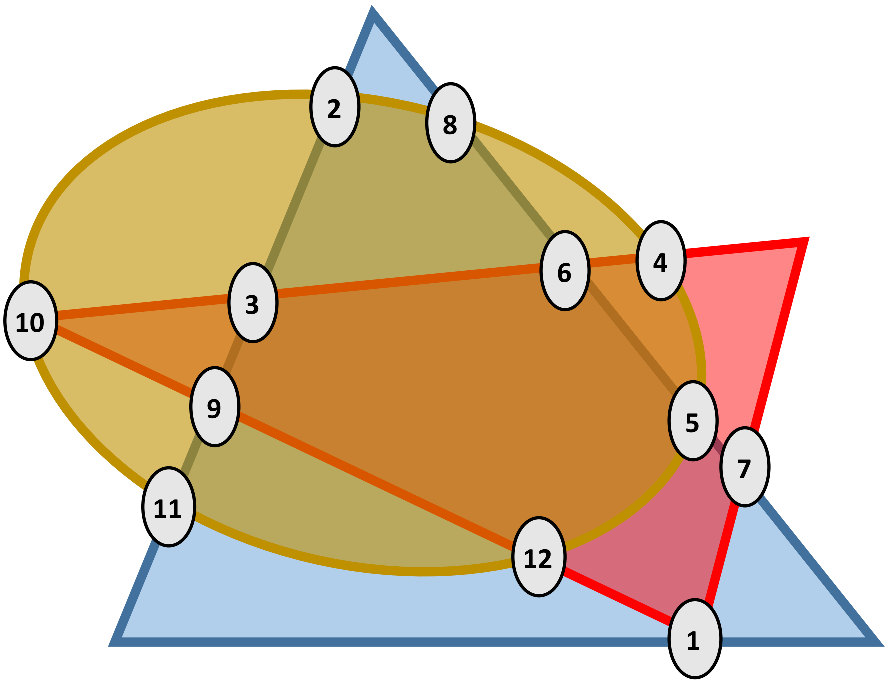
Solución 61.



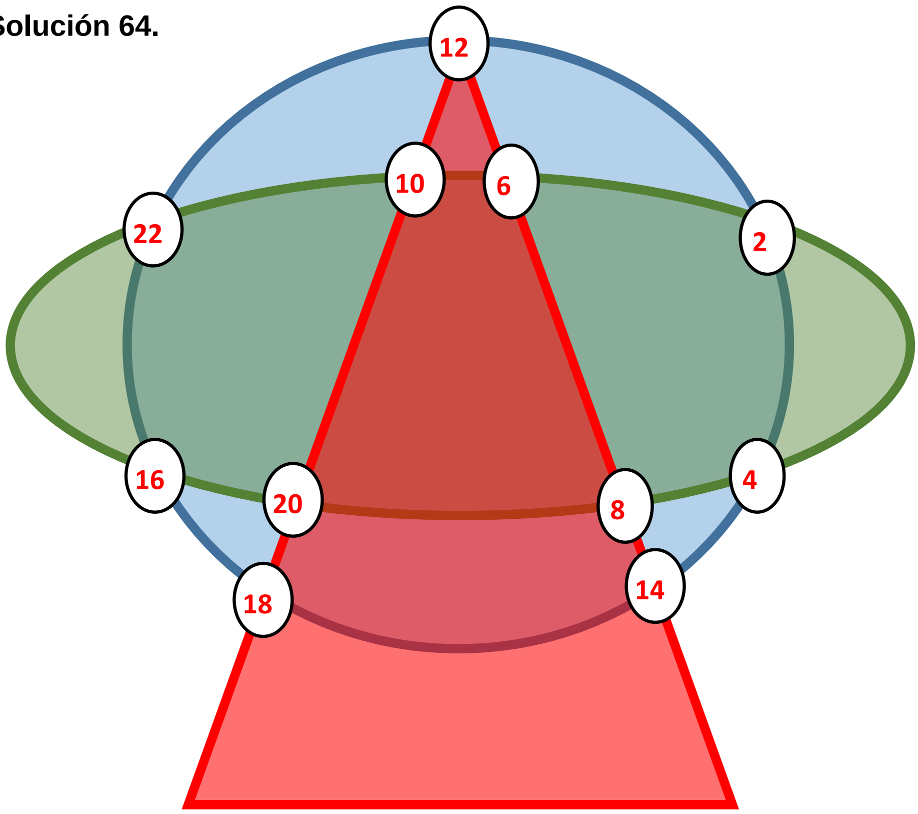
Solución 62



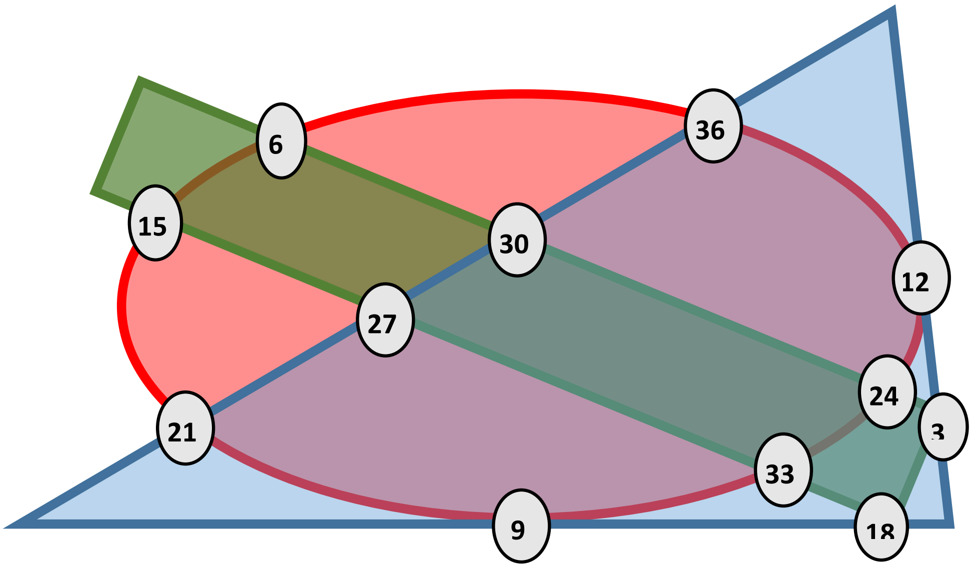
Solución 63.



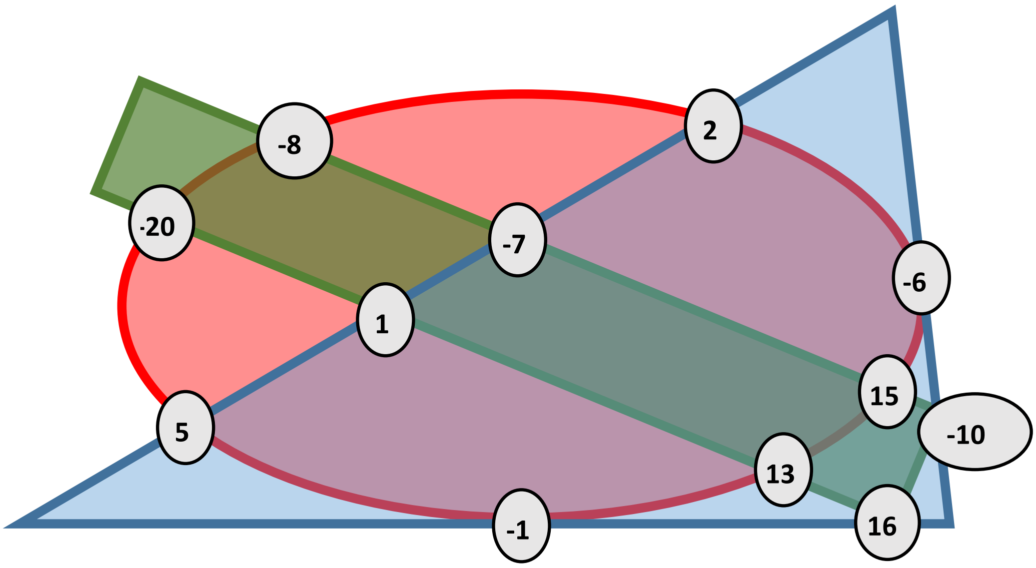
Solución 64.



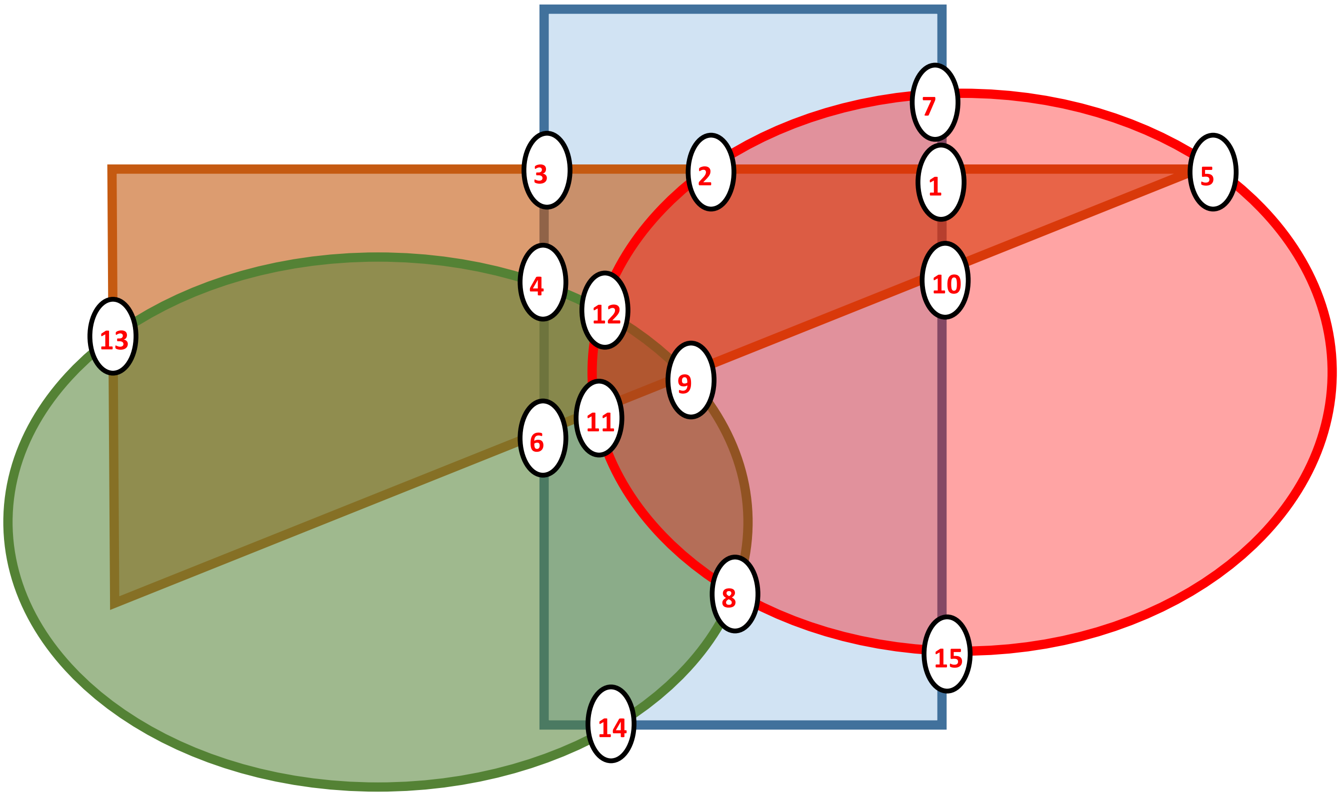
Solución 65.



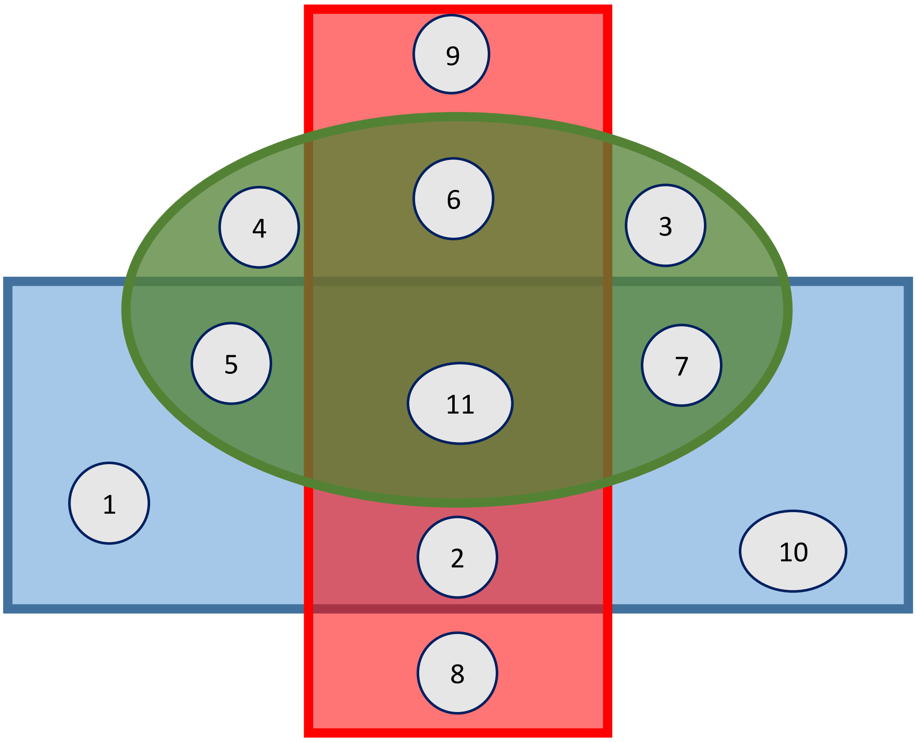
Solución 66.



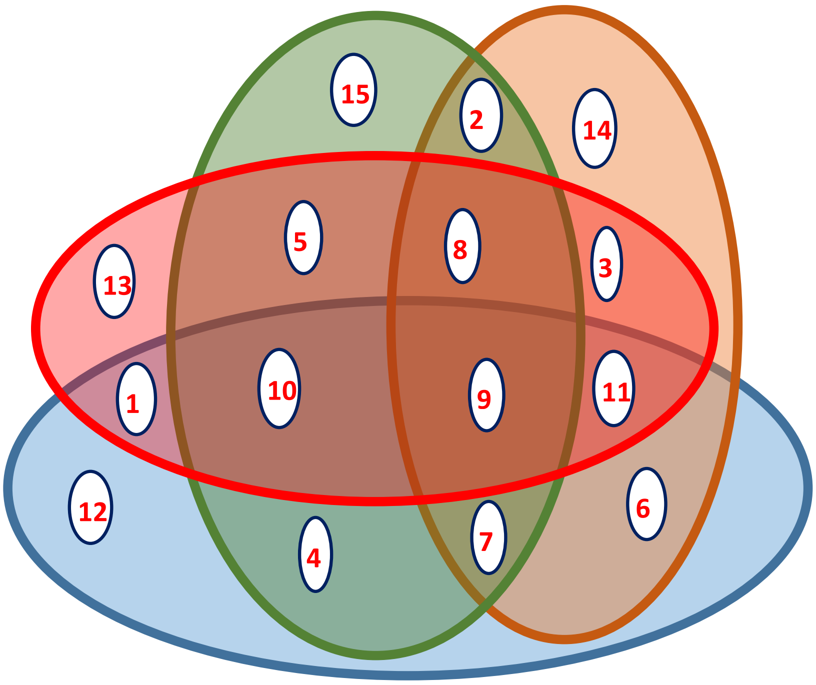
Solución 67.



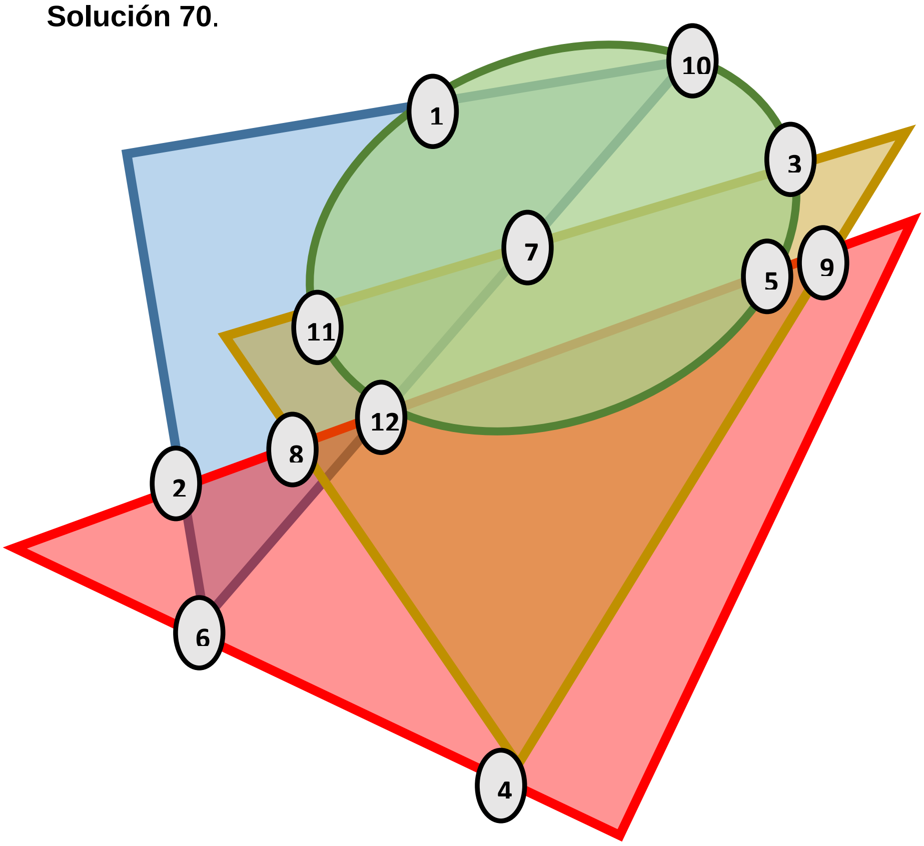
Solución 68.



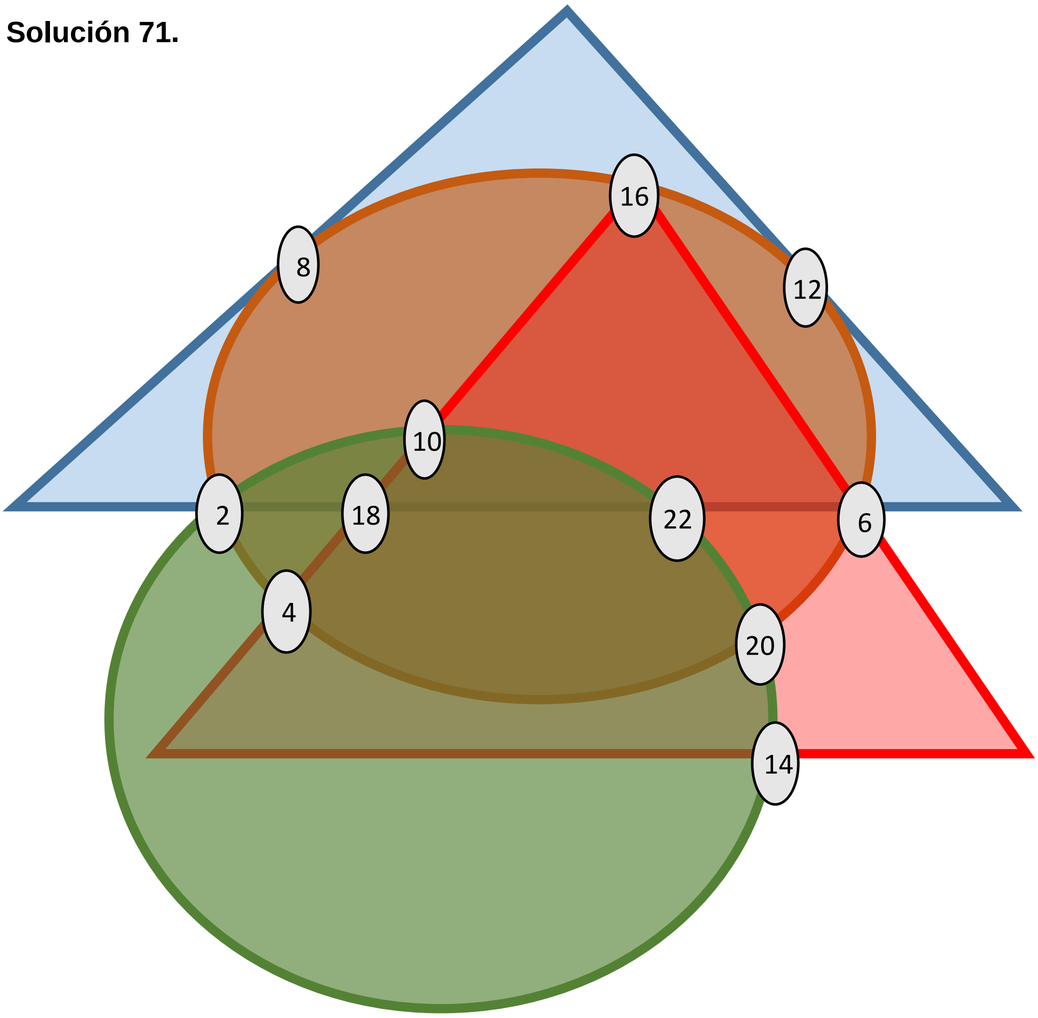
Solución 69.



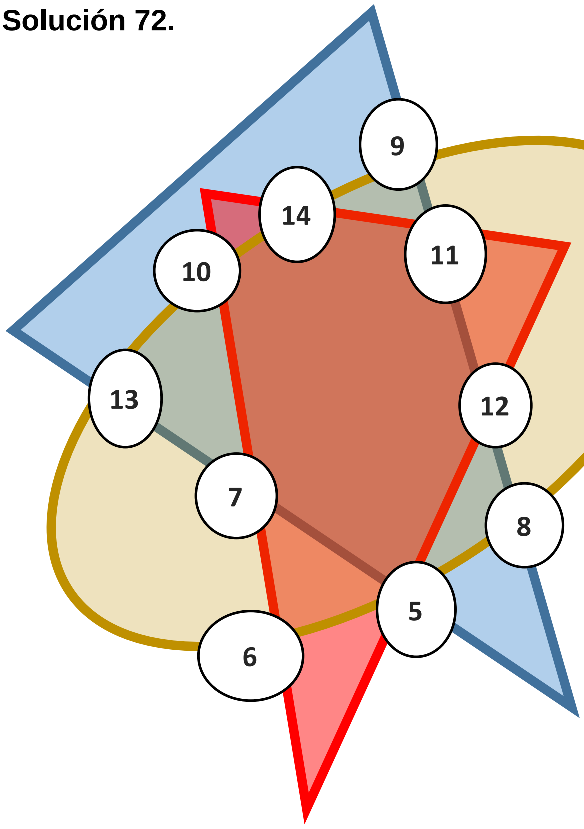
Solución 70.



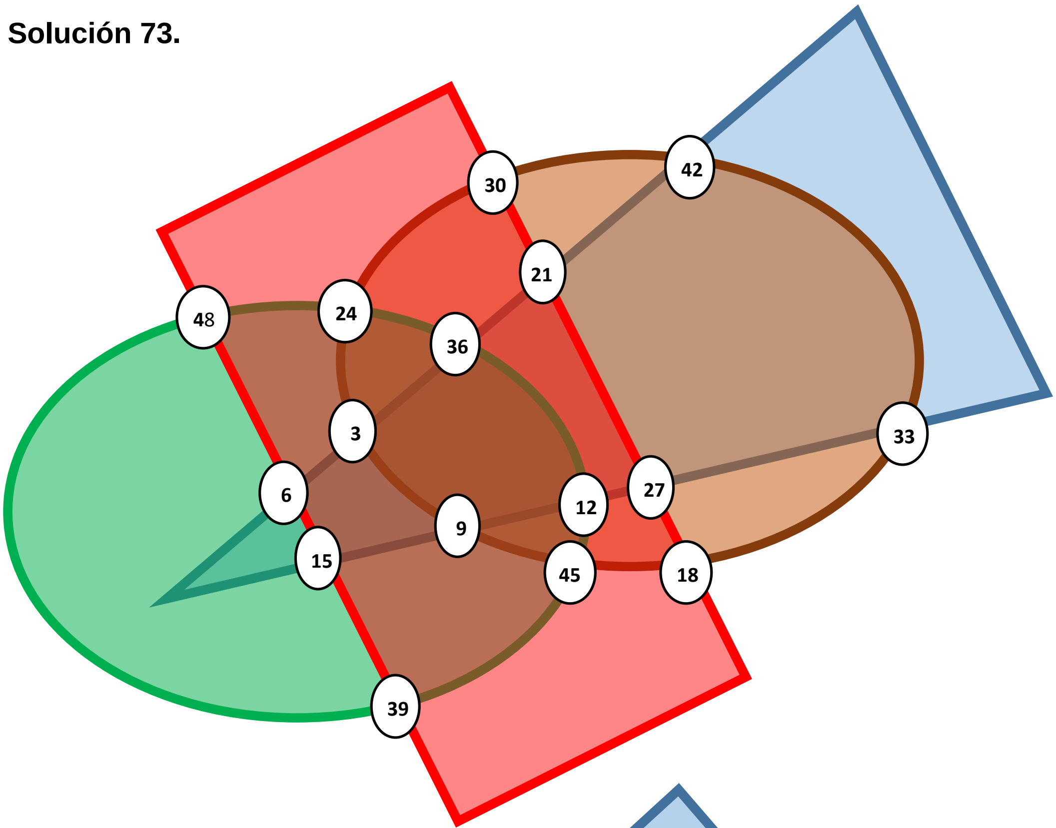
Solución 71.



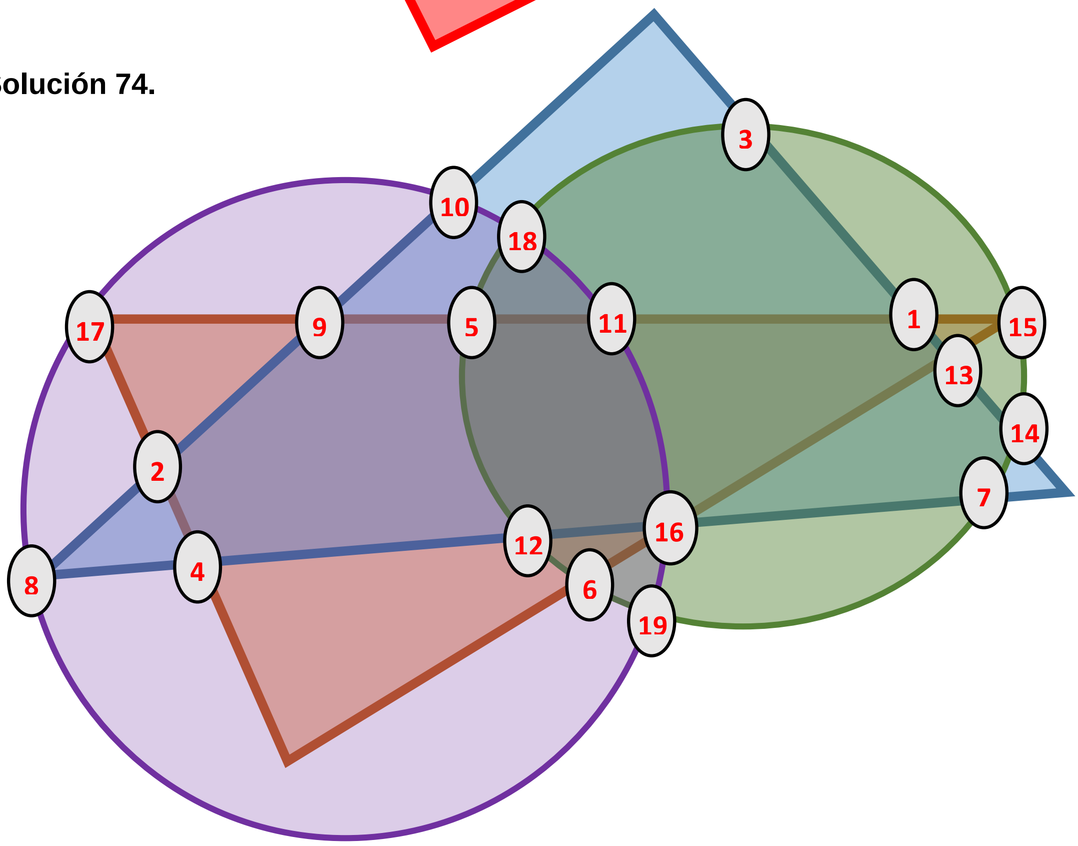
Solución 72.



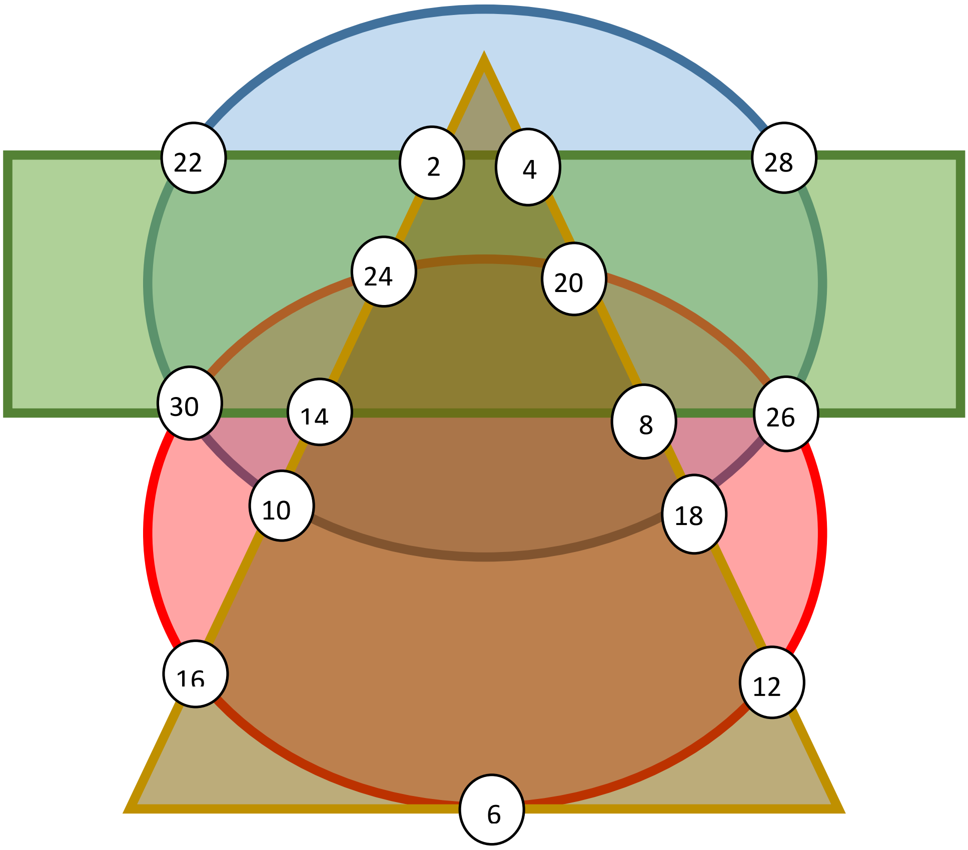
Solución 73.



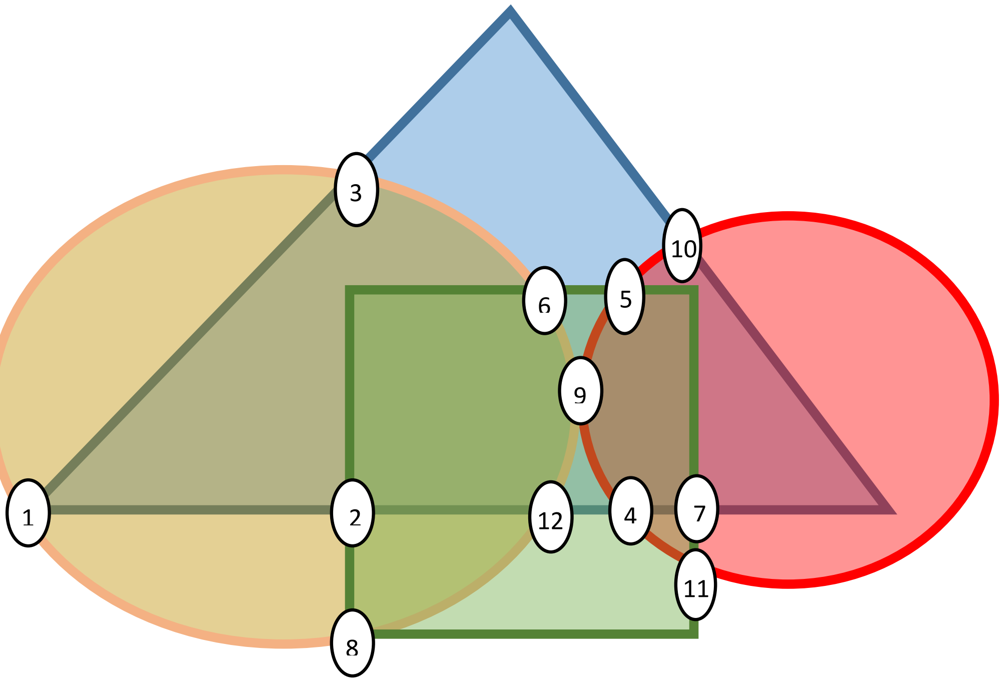
Solución 74.



Solución 75.



Solución 76.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agra, G., Formiga, N., Oliveira, P., Costa, M., Fernandes, M. y Nóbrega M. (2019). Analysis of the concept of Meaningful Learning in light of the Ausubel's Theory. *Rev Bras Enferm, 72*(1), 248-55. http://dx.doi.org/10.1590/0034-7167-2017-0691

Arteaga, B. y Macias, J. (2016). Didáctica de las matemáticas. España: Universidad Internacional de La Rioja, S. A.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1980). Psicología educacional. Rio de Janeiro: Interamericana.

Ausubel, D. (1963). La psicología del aprendizaje verbal significativo. Grune y Stratton.

Awawdeh Shahbari, J. (2018). Mathematics teachers' conceptions about modelling activities and its reflection on their beliefs about mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49:5, 721-742, DOI: 10.1080/0020739X.2017.1404650

Babaei, S. y Izadpanah, G. y Cunha, G. (2019). Comparación de los efectos de diferentes organizadores avanzados en la comprensión auditiva de los estudiantes de inglés como lengua extranjera: Vocabularios clave, preguntas de comprensión preliminar y anotaciones multimedia. *Cogent Education, 6*(1), 1-10.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué lo hace especial? *Revista de formación del profesorado, 59*(5), 389 - 407

Birr, M. (2016). Alfabetización juvenil y teorías culturales. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences 3*(1), 70–76.

Bonghanoy, G.B., Sagpang, A.P., Alejan, R.A., Jr., & Rellon, L.R. (2019). Transformative professional development for mathematics teachers. Journal on Mathematics Education, 10(2), 289-302.

Bosch, M., & Winsløw, C. (2019). The external didactic transposition of mathematics at university level: dilemmas and challenges for research. Educação Matemática Pesquisa.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2): 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Springer.

Burton, L. (1992). Professor of Education (Mathematics and Science) Evaluating an 'entitlement curriculum': mathematics for all?. The Curriculum Journal, 3:2, 161-169, DOI: 10.1080/0958517920030205

Cai J., Hwang S., Robison V. (2019) Journal for Research in Mathematics Education: Practical Guides for Promoting and Disseminating Significant Research in Mathematics Education. In: Kaiser G., Presmeg N. (eds) Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Cai, J., Morris, A., Hohensee, Ch., Hwang, S., Robison, V. y Hiebert. J. (2017). Making Classroom Implementation an Integral Part of Research. Journal for Research in Mathematics Education, 48(4), 342-347. doi:10.5951/jresematheduc.48.4.0342

Cejas Martínez M.F., Mendoza Velazco D.J., Navarro Cejas M. & Morales Corozo J.P. (2021). Pedagogical Leadership within the Framework of Human Talent Management: A Comprehensive Approach from the Perspec-tive of Higher Education in Ecuador. Integration of Education. 25(1), 8-21. http://eosj.mrsu.ru/index.php/edumag/article/download/673/167/

Cerda, G., Pérez, C., Casas, J. y Ortega, R. (2017). Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un análisis multidisciplinar, Psychology, Society, & Education, 9(1), pp. 1-10. ISSN 2171-2085 (print) / ISSN 1989-709X (online)

Chernikov, A. (2014). Theories without the tree property of the second kind, Ann. Pure Appl. Logic 165(2), pp. 695–723. Crossref, ISI, Google Scholar

Chevallard Y. (1985) La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné, Paris, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., y Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. Encyclopedia of Mathematics Education. Netherlands: Springer

Choy, B. H., Thomas, M. O. J., & Yoon, C. (2017). The FOCUS Framework: Characterising productive noticing during lesson planning, delivery and review. In E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks (pp. 445–466). New York: Springer.

Colas Bravo, P. (1990). El análisis de datos en la metodología Cualitativa. En Revista de Ciencias de la Educación. Núm 162, 52 1-539. Octubre-Diciembre

Cole, S. (2003). *Mathematical Logic*. Dover Publications Inc

Colliver, Y. y Veraksa, N. (2021). Contribuciones de Vygotsky a la comprensión del desarrollo emocional a través del juego en la primera infancia. *Early Child Development and Care*, 191(4), 1-20.

Darlington, E. (2019). Shortcomings of the 'approaches to learning' framework in the context of undergraduate mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 8*(3), 293-311. doi:http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.2541

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers

Delgado Coronado, S. (2015). El papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. Panorama, 9(16), 32-42.

Deringöl, Y. (2020). Percepciones de los estudiantes de secundaria de su autoeficacia en matemática visual y geometría: un estudio de alumnos de sexto a octavo grado en la provincia de Estambul, Turquía, Educación 3-13, DOI: 10.1080 / 03004279.2019.1709527

Diamond, J.M. Teachers' beliefs about students' transfer of learning. J Math Teacher Educ 22, 459–487 (2019) doi:10.1007/s10857-018-9400-z

Ernest, P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education. Londres: RoutledgeFalmer

Estapa, A. y Amador, J. (2021). Una metasíntesis cualitativa de indicaciones y notación basadas en videos en la educación matemática. *Math Ed Res J. 23*(2), 1-19. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00378-7

Felluga, D. (2015). *Teoría crítica: los conceptos clave.* Routledge

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J.M., González-Regaña, A.J. et al. Math Ed Res J (2019). https://doi.org/10.1007/s13394-019-00301-1

Fried, M. (2020). Transdisciplinarity in Mathematics Education: Blurring Disciplinary Boundaries, Mathematical Thinking and Learning, 22:1, 81-84, DOI: 10.1080/10986065.2019.1640495

Giardini, E. (2016). Mathematical learning with a purpose, Journal of Student Engagement: Education Matters, 6(1), pp, 13-18. Available in: http://ro.uow.edu.au/jseem/vol6/iss1/3

Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., & Wilhelmi, M. R. (2019). Analysis of Didactical Trajectories in Teaching and Learning Mathematics: Overcoming Extreme Objectivist and Constructivist Positions. International Electronic Journal of Mathematics Education, 14(1), 147-161. https://doi.org/10.12973/iejme/3983

Gomez Chacon, I. (2000). Matemática emocional. España: Narcea.

Gómez Chacón, I. M. (2006). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Habermas, J. (1966). Teoría y Práctica: ensayos de filosofía social. Sur, Buenos Aires.

Hayal, Y. & Meral. C, (2020) Development of an attitude-towards-using-mathematics scale for high-school students and an analysis of student attitudes, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51:1, 3-25, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1679398

Herrera, N., Montenegro, W. y Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 35, pp. 254-287.

Hempbel, C. (1997), la teoría de la verdad en los positivistas lógicos.Tecnos. Madrid, España.

Hilton, A., Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. J Math Teacher Educ 22, 545–574. doi:10.1007/s10857-018-9405-7

Huang, D., & Manouchehri, A. (2019). Online mathematics teacher education in the US: A status report. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 19(2). Retrieved from https://www.citejournal.org/volume-19/issue-2-19/mathematics/online-mathematics-teacher-education-in-the-us-a-status-report

Indra Prahmana, R. y Kusumah, Y. (2017). Didactic trajectory of research in mathematics education using research-based learning. The Asian Mathematical Conference 2016 (AMC 2016) IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 893. 012001 doi :10.1088/1742-6596/893/1/012001.

Jankvist, U., & Misfeldt, M. (2019). CAS Assisted Proofs in Upper Secondary School Mathematics Textbooks. Journal of Research in Mathematics Education, 8(3), 232-266. doi:http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.3315

Jess, M y McEvilly, N. (2015). Enfoques tradicionales y contemporáneos del aprendizaje profesional a lo largo de la carrera: un viaje de educación física primaria en Escocia, Educación 3-13, 43: 3, 225-237, DOI: 10.1080 / 03004279.2013.804851

Kagan, D. (1992). Implication of Research on Teacher Belief, Educational Psychologist, 27:1, 65-90, DOI: 10.1207/s15326985ep2701_6

Kellner, D. (2003). Hacia una teoría crítica de la educación. *Democracia y naturaleza, 9*(1), 51-64.

Kim, C., & Hodges, C. (2012). Effects of an emotion control treatment on academic emotions, motivation and achievement in an online mathematics course. Instructional Science, 40(1), 173-192. Retrieved January 9, 2020, from www.jstor.org/stable/43575194

Lessani, A., Yunus, A. y Bakar, K. (2017). ComparisoNof New Matemáticas Métodos de enseñanza with Método Tradicional. *PERSONAS: Revista Internacional de Ciencias Sociales, 3* (2),1285-1297

Ma, H., Lee, D., Lin, S., Wu, D. (2015). A Study of Van Hiele of Geometric Thinking among 1st through 6th Graders. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11(5), 1181-1196. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1412a

Martínez-Sierra, G. (2015). Students' emotional experiences in high school mathematics classroom. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Prague, Czech Republic. pp.1181-1187.

McCloskey, A., Lloyd, G. & Lynch, C. (2019). Theorizing mathematics instruction using ritual: tensions in teaching fractions in a fifth grade classroom. Educ Stud Math 101, 195–213 (2019) doi:10.1007/s10649-017-9779-y

Mendoza Velazco, D. J., & Rivero Padrón, Y. (2019). Teaching Resource for the Teaching of Geometry: Circular Trigonometric Geoplane. International Electronic Journal of Mathematics Education, 14(1), 3-13. https://doi.org/10.12973/iejme/3936

Mendoza, D. J., & Mendoza, D. I. (2018). Information and Communication Technologies as a Didactic Tool for the Construction of Meaningful Learning in the Area of Mathematics. International Electronic Journal of Mathematics Education, 13(3), 261-271. https://doi.org/10.12973/iejme/3907

Mendoza Velazco, D. J., Cejas Martínez, M. F., Navarro Cejas, M., Flores Hinostroza, E. M. & Castillo Pinos, K. M. (2021). La eficacia pedagógica en la cultura organizativa escolar y la comunidad profesional de aprendizaje. Uniciencia, 35(2), e14490. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.11

Mendoza, D. & Flores, E. (2018). Relación entre el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y la praxis docente mediadora. Divulgaciones Matemáticas, 19(1), pp. 63-73.

Miller, D. & Cadwallader, T. (2019). Investigating undergraduate students' view of and consistency in choosing empirical and deductive arguments, Research in Mathematics Education, DOI: 10.1080/14794802.2019.1677489

Muid, A. y Fathor, R. (2019). Ta'lim Maharah al-Kalaam Fi Dhu'i al-Nazhariyat al-Ijtima'iyyah al-Tsaqafiyah Li Vygotsky. *Arabiyatuna: Jurnal Bahasa Arab 3*(2), 251-261. http://dx.doi.org/10.29240/jba.v3i2.971.

Munakata, M., Vaidya, A., Monahan, C. & Krupa, E. (2019). Promoting Creativity in General Education Mathematics Courses, PRIMUS, DOI: 10.1080/10511970.2019.1629515

Newman, S. y Latifi, A. (2021). Vygotsky, educación y formación de profesores. *Journal of Education for Teaching, 47*(1), 4-17,

Nick, A. (2019). Characterising the shape of mathematics teaching decisions made over time: an application of tri-polar analysis, Research in Mathematics Education, DOI: 10.1080/14794802.2019.1695143

Nortes Martínez, R. y Nortes Checa, A. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. Revista de Investigación Educativa, 34(1), pp. 103-117.

Parsons, C. (1967). Fundamentos de Matemáticas. Nueva York: Macmillan Publishing Co.

Piaget, J. (1977). Recherches sur l'abstraction refléchissante. L'abstraction des relations logico-arithmétiques. Investigaciones sobre la abstracción reflexionante. I. La abstracción de las relaciones lógico- matemáticas. Buenos Aires: Huemul.

Pinter, M. (2014). Writing to Enhance Understanding in General Education Mathematics Courses, PRIMUS, 24:7, 626-636, DOI: 10.1080/10511970.2014.895458

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Popkewitz, T. (1988). Paradigma e ideología en la investigación educativa. Mondadori, Madrid.

Revelo-Sánchez, O., Collazos-Ordoñez, C. y Jiménez-Toledo, J. (2018). El trabajo colaborativo como estrategia didáctica para la enseñanza/aprendizaje de la programación: una revisión sistemática de literatura. TecnoLógicas, 21(41), pp. 115-134, 2018.

Rodríguez Palmero, L. (2008). La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva. Editorial octaedro. Barcelona: Edición electrónica.

Rodriguez, A., Celorio, A. y Gutierrez, J. (2019). Enseñanza de la Matemática básica en la educación general básica de Ecuador. ROCA. Revista científico- educacional de la provincia Granma. 15(2), pp. 217-230.. ISSN: 2074-0735. RNPS: 2090.

Rosholm M, Mikkelsen MB, Gumede K (2017). Tu jugada: El efecto del ajedrez en los puntajes de las pruebas de matemáticas. PLoS ONE 12 (5): e0177257. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257

Rowlett, P., Smith, E., Corner, A., O'Sullivan, D. & Waldock, J. (2019). The potential of recreational mathematics to support the development of mathematical learning, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50:7, 972-986, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1657596

Santiago V., Wim van D. & Lieven V. (2008). Using mathematics for solving real problems, Culture and Education, 20:4, 391-406, DOI: 10.1174/113564008786542235

Schukajlow, S.; Rakoczy, K. y Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education. Theoretical considerations and empirical contributions formal und inhaltlich überarbeitete. ZDM: the international journal on mathematics education, 49 (2017) 3, S. 307-322.

Shreiner, T. & Dykes, B. (2021). Visualizando la enseñanza de visualizaciones de datos en estudios sociales: un estudio de las prácticas, creencias y conocimientos de alfabetización de datos de los maestros. Teoría e Investigación en Educación Social, 49(2), 262-306.

Stewart, S., Epstein, J. & Troup, J. (2019) Leading students towards the formal world of mathematical thinking: a mathematician's reflections on teaching eigentheory, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(7), 1011-1023, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1657598

Thorndike, L. y Bruce, D. (2000). *Inteligencia animal*. Routledge.

Van Wyk, G. y De Beer, J. (2019). Bridging the Theory – Practice Divide: Life Sciences Student Teachers Perceptions of Teaching in Communities of Practice in a Teaching School, African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 23: 3, 276-285, DOI: 10.1080 / 18117295.2019.1658454

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes.

Cambridge: Harvard University Press.

Wagner, H. (2019). Definición sustitutiva de la verdad lógica de Quine y el significado filosófico del teorema de Löwenheim-Hilbert-Bernays. *Historia y filosofía de la lógica, 40*(2), 182-199.

Walshaw, M. (2017). Comprensión del desarrollo matemático a través de Vygotsky. *Investigación en educación matemática, 19*(3), 293-309.

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G., Brown, R. y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. J Math Teacher Educ. doi:10.1007/s10857-019-09453-0

Widiati, I. y Juandi, D. (2019). Philosophy of mathematics education for sustainable development, J. Phys.: Conf. Ser. 1157 022128.

Winsløw, C. (2007). Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education, The Curriculum Journal, 18:4, 523-536, DOI: 10.1080/09585170701687969

Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmut, R., & Nardi, E. (2018) Research on University Mathematics Education. Developing research in mathematics education - Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe. Oxon, UK: Routledge.

Zelbo, S. (2019). The recreational mathematics activities of ordinary nineteenth century Americans: A case study of two mathematics puzzle columns and their contributors, British Journal for the History of Mathematics, 34:3, 155-178, DOI: 10.1080/26375451.2019.1646522

ANEXOS

ANEXO 1.

Instrumento de recopilación de información sobre el apoyo de los memoretos para los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Estimado docente, una vez que usted ha participado del taller de enseñanza de matemáticas con material concreto, donde se ha trabajado lo concerniente al uso de memoretos para apoyar la enseñanza, comedidamente solicitamos su apoyo llenando este cuestionario, mismo que servirá para fines netamente investigativos.

Nivel educativo en el que usted se desempeña:

____

Pregunta 1. ¿Cree usted que los memoretos pueden ayudar en los procesos de enseñanza de matemáticas?

SI ____ NO _____

Pregunta 2. A su criterio, ¿piensa usted que los memoretos generan interés en los estudiantes?

SI ____ NO _____

Pregunta 3. ¿A su criterio indique, que contenidos del currículo oficial pueden ser desarrollados con ayuda de los memoretos?

Aritmética _____

Algebra _____

Conjuntos _____

Geometría _____

Ninguno ______

Otros _____ Por favor especifique

____
____

Pregunta 4. El currículo oficial propone que el perfil de salida del bachiller ecuatoriano es que sea un ciudadano crítico y reflexivo caracterizado por ser justo solidario e innovador, con ¿Cree usted que los memoretos apoyan para formar el bachiller que propone ese currículo?

SI ____ NO _____

Pregunta 5. ¿Utilizaría usted los memoretos en su desempeño como docente?

SI ____ NO _____

Pregunta 6. Con absoluta confianza sugiera usted que acciones deben implementarse a fin de que los memoretos puedan ser usados por los docentes en su desempeño diario.

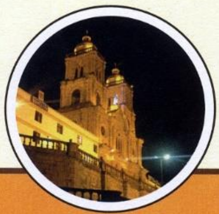
____
____

A nombre del grupo de investigación EUREKA 4i, agradecemos por su colaboración, reiterando que esta información se usara únicamente con fines investigativos.

ANEXO 2.

Participación en el V Encuentro Internacional de Educación y Aprendizaje, Madrid, 2016.

ANEXO 3.



HERALDO
DEL CAÑAR
SEMANARIO INDEPENDIENTE - FUNDADO EN 1974

Lcda. Fabiola Sanmartin P.
DIRECTORA

OFICINA EN AZOGUES:
BOLÍVAR 3-22
(ENTRE SERRANO Y VINTIMILLA)
TELEFAX: 2240-220

OFICINA EN CAÑAR
BORRERO 5-23 Y BOLÍVAR
(PARQUE CENTRAL)
TELÉFONO: 2235-988

Azogues, julio 19 de 2018

Oficio Circular Nº 002-HC-18

Matemático
Vinicio Vásquez Bernal
DISTINGUIDO COLUMNISTA DEL SEMANARIO HERALDO DEL CAÑAR.
Presente.

De nuestra consideración:

Reciba el más afectuoso saludo de parte de la Junta Administrativa de este Medio de Comunicación, que es el suyo.

Por la presente, al reiterar nuestra sentida gratitud por la colaboración invaluable que en beneficio de la colectividad cañarense viene prestando a través de sus acertados como ponderados artículos de opinión, hemos de hacer de su conocimiento que la Junta Administrativa, ha analizado y decidido organizar de mejor manera la página editorial, con el fín de prestar facilidades para una mejor lectura y reflexión, propiciando que, desde esta fecha en adelante, todos y cada uno de nuestros distinguidos Articulistas de Opinión, en igualdad de condiciones, roten en los espacios principales de la mencionada página, encarece se sirva enviarnos un artículo cada 15 días, esto es, saltando una edición, ajustando al máximo su extensión a 3 mil caracteres, y hacernos llegar máximo hasta el jueves al medio día.

Por otro lado, el segmento RETO, que tanta atención y acogida ha merecido entre nuestros lectores, así como cualquier otra nota informativa de orden educativo, científico o investigativo que suele gentilmente hacernos llegar, esperamos continúe enviándonos, cuando Ud. lo crea pertinente.

Gracias a su gran sensibilidad y gentil comprensión, aspiramos que continuaremos recibiendo su generoso como inteligente apoyo, en pos de los más altos objetivos provinciales, que Ud. y nosotros tenemos.

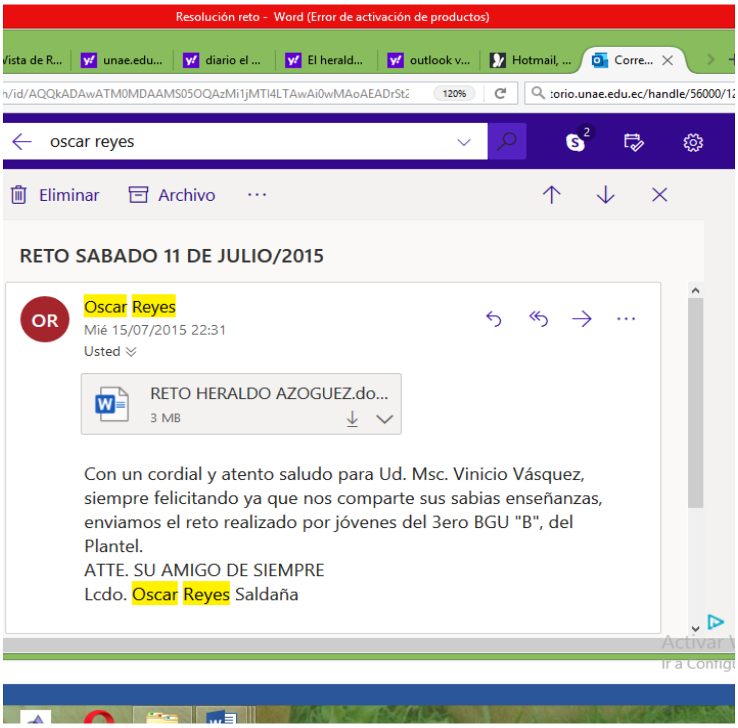
Confiando contar una vez más con su gentil atención, agradecemos por anticipado y suscribimos,

Atentamente,

Dr. Bolívar Delgado Arce
PRESIDENTE-EDITOR

Tnlga. Natalia García Novillo
GERENTE ADMINISTRATIVA

ANEXO 4



ASUNTO: RETO

SEMANARIO: "EL HERALDO" DE LA CIUDAD DE AZOGUES

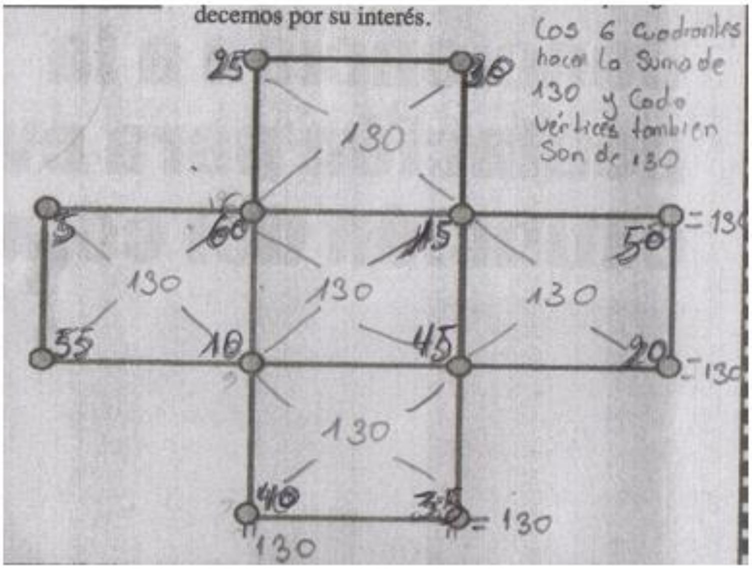
FECHA: SABADO 11 DE JULIO DEL 2015

PARA: MATEMÁTICO VINICIO VÁSQUEZ

DE: LCDO. OSCAR REYES SALDAÑA – LA TRONCAL

Realizado por los alumnos: Lady Espinoza, Angie Blúa y Estefania Quiroz

TERCERO BGU "B" COLEGIO: BACHILLERATO INTERNACIONAL DR. TOMAS RENDON SOLANO.



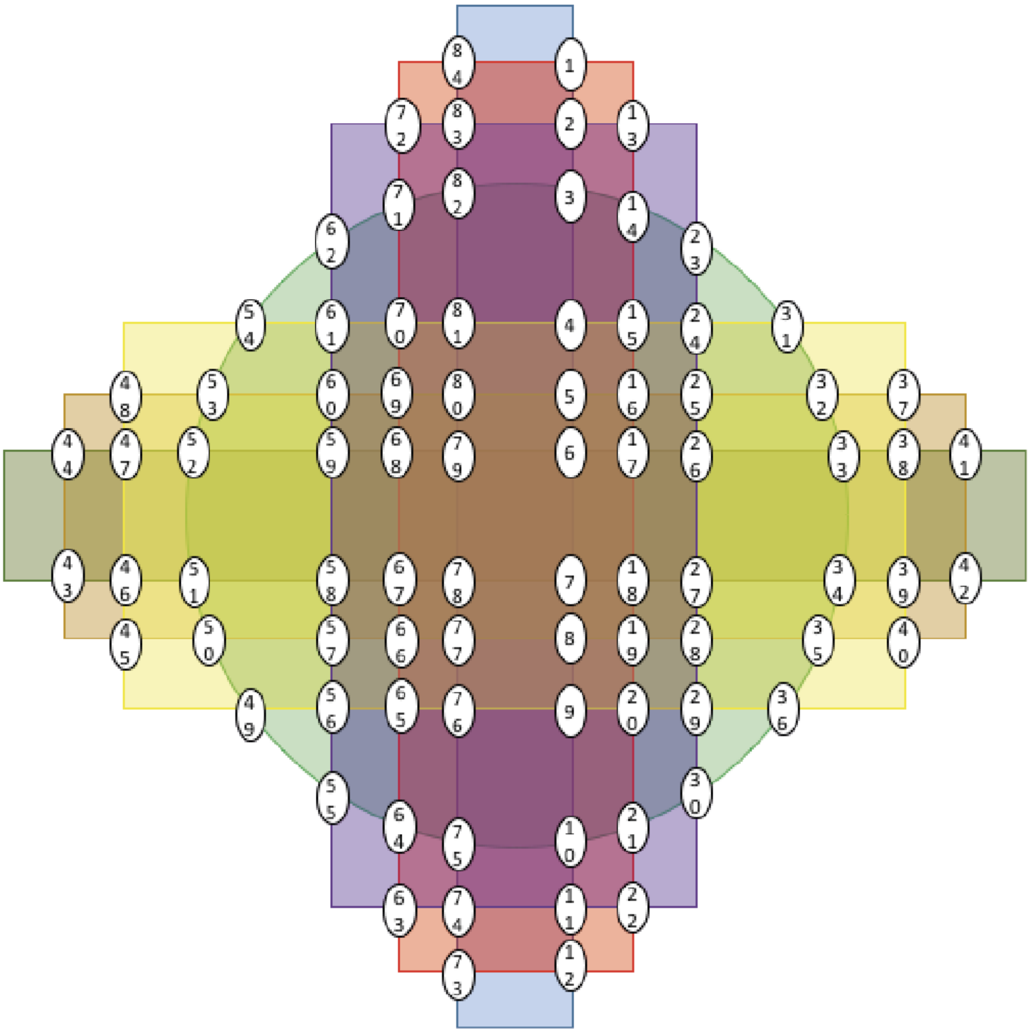
Participación de docente y estudiantes del colegio "La Puntilla", de la Troncal.

GRUPO DE INVESTIGACIÓN INSTITUCIONAL EUREKA 4i
El grupo de investigación institucional EUREA 4i, es un grupo conformado por docentes investigadores de la UNAE, que desde el 2018 vienen trabajando propuestas pedagógicas que mejoren los procesos de enseñanza de las matemáticas y de conocimientos afines.

Para ello se han propuesto algunas líneas de investigación que han permitido desarrollar cuatro investigaciones con resultados positivos, estas áreas son: La Taptana Cañar, El uso de Geogebra en la Enseñanza, Enseñanza con Material Concreto y La Heuristica.

Este grupo ha logrado los siguientes resultados:

-El Instituto Ecuatoriano de Geogebra
-El Laboratorio de Enseñanza de matemáticas con material concreto
-La propuesta pedagógica "Taptana Cañari Conocimiento Integral"
-La propuesta pedagógica "Memoretos"
-Libro Didáctica de las Matemáticas
-Libro "Geogebra en Ecuador"
-Memorias de las Primeras Jornadas Ecuatorianas de GeoGebra
-Memorias de las Segundas Jornadas Ecuatorianas de GeoGebra
-Cuento Kushilla Llupashpa
Además ha institucionalizado los eventos:
-Jornadas Ecuatorianas de GeoGebra
-Certamen Pedro Vicente Maldonado



ISBN: 978-9942-40-431-2