Matemáticas de los pueblos originarios de América

MATEMÁTICAS DE LOS PUEBLOS ORIGINARIOS DE AMÉRICA

MATEMÁTICAS DE LOS PUEBLOS ORIGINARIOS DE AMÉRICA.

Ing. Diego Tapia
Tnlgo. Edison Oscullo
Diseño y diagramación

Antonio Bermeo Cabrera
Ilustración de portada

Obra arbitrada por pares ciegos
ISBN: 978-9942-7130-1-8
Quito - Ecuador
2023

www.uaw.edu.ec
Quito - Ecuador Av. Colón E5-56 y Juan León Mera, Edif. Ave María, Torre B (+593)963918707

www.unae.edu.ec
Av. Independencia S/N Sector Chuquipata- Ecuador
(+593) (7) 3701200

www.unam.mx
Av. Universidad 3000, Colonia Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Alcaldía de Coyoacán, C.P. 04510,Ciudad de México.
(+593) (7) 3701200

OEI

ORGANIZACIÓN DE ESTADOS IBEROAMERICANOS PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA – OEI

Sara Jaramillo Idrobo

Directora y Representante Permanente OEI – Oficina Nacional del Ecuador

Henry Onel Ulloa Buitrón

Técnico de Proyectos OEI - Oficina Nacional del Ecuador

La OEI promueve la conformación de redes para la colaboración científica y la investigación como una estrategia muy potente, que en lo cualitativo ayuda a democratizar el conocimiento y en lo cuantitativo suma recursos y actores. Las redes de universidades que se unen para impulsar la investigación alrededor de un tema de interés regional, son el mejor referente de esta colaboración.

En este sentido el trabajo de investigación Matemáticas de los Pueblos Originarios de América, que es fruto del trabajo académico de docentes e investigadores de la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Nacional de Educación UNAE de Ecuador, el Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México y la Universidad Intercultural de las Nacionalidades y Pueblos Indígenas Amawtay Wasi de Ecuador, es una propuesta que permite entender el bagaje científico y cultural que los pueblos ancestrales construyeron alrededor de las matemáticas.

Este trabajo de investigación que involucra a varias instituciones y docentes de algunos países del espacio iberoamericano [Ecuador, México y Perú principalmente] suscita mucho interés para la OEI, ya que va en consonancia con los programas y planes institucionales sobre el fomento del acceso abierto al conocimiento, la ciencia abierta y la revitalización de las lenguas en el espacio Iberoamericano.

AUTORES

Coordinadores:
Marco Vinicio Vásquez Bernal
Rosa Ildaura Troya Vásquez
Maritza Jacqueline Carchipulla Pandi
Fernando Alberto Yánez Balarezo

Capítulo 1:
Luis Fernando Magaña Solís
Universidad Nacional Autónoma de México

Capítulo 2:
Everardo Lara González

Capítulo 3:
Marco Vinicio Vásquez Bernal, Rosa Ildaura Troya Vásquez
Universidad Nacional de Educación UNAE

Capítulo 4:
Fernando Alberto Yánez Balarezo
Universidad Intercultural de los Pueblos y Nacionalidades Indígenas Amawtay Wasi

Capítulo 5:
Roxana Auccahuallpa Fernández
Universidad Nacional de Educación UNAE

Capítulo 6:
Nubia Esthela Duran Agudelo, Miguel Alejandro Orozco Malo
Universidad Nacional de Educación UNAE

Este es un trabajo colaborativo de investigadores de México, Perú y Ecuador que refleja las cosmovisiones Matemáticas de los pueblos originarios del Abya Yala, evidenciando sus formas de pensamiento de cada cultura, lógicas, sistemas y formas de entender su realidad de manera particular

Índice

Prólogo

Dr. Pablo Pedro Pomboza Pomaquiza
Rector Universidad Intercultural de las Nacionalidades
y Pueblos Indígenas Amawtay Wasi UINPIAW

La matemática también es política. La que se estudia en las escuelas, la que hemos aprendido a lo largo de los años, se da desde el eurocentrismo y, por lo tanto, invisibiliza los importantes desarrollos de los pueblos del Sur Global en este campo. Se trata de mecanismos sofisticados del patrón mundial de poder, parte del colonialismo y luego de la colonialidad. Tengamos presente que cada cultura aborda los sistemas lógicos con sus propios símbolos y reglas. No hay pueblos más avanzados que otros en esta materia, entenderlo de esa forma sería caer en clasificaciones excluyentes y desarrollistas (teleológicas) que deben ser superadas. Cada pueblo se acerca a las leyes lógicas e invisibles de la matemática a su manera y procura desarrollar conocimiento válido desde sus prácticas consuetudinarias. Así, se busca entender los principios universales de la matemática para mejorar la calidad de vida, esto es, avanzar en el manejo de la agricultura, la navegación, la construcción de casas, la gestión adecuada de los alimentos y la práctica de otras actividades diarias.

Esta obra colectiva representa un aporte muy significativo al conocimiento de los sistemas matemáticos y las prácticas tradicionales, lo que su vez está estrechamente relacionado con la historia de los pueblos de Abya Yala y la relación con la tierra y la naturaleza. Entender las matemáticas de los pueblos originarios de América es una tarea de gran contenido político y académico, es otra manera de resistencia, ya que empodera a los pueblos excluidos y cuestiona viejas relaciones de poder. Indirectamente, se interpela los discursos hegemónicos que dan forma a la verdad científica y establecen la manera legítima de conocer. Como se sabe, la colonialidad subestima el conocimiento "no-blanco" de "quienes habitamos fuera del Norte imperial" (Segato, 2010,12), y enfatiza "la superioridad del grupo dominante (…) en áreas y criterios relevantes de evaluación social, tales como la inteligencia, el atractivo, la honestidad, la creatividad, el dinamismo, la ética del trabajo, y demás" (Van Dijk, 2010, 68-69). Ciertamente, la ciencia también puede ser una "práctica social discriminatoria" (Van Dijk, 2010, 69).

Como señaló Aníbal Quijano (2000, 47), la idea de raza es el "instrumento universal de clasificación social básica", hasta hoy "el más eficaz mecanismo de dominación dentro del poder mundial capitalista". Y, como indica Teun A. van Dijk (2010, 72), el "racismo simbólico" o "racismo liviano" es particularmente duro de combatir, pues se manifiesta en discursos sutiles y otras prácticas de inferiorización menos evidentes. Justamente, es necesario poner sobre la mesa las prácticas que no "son vistas como "racistas" por el consenso dominante". Además, el lingüista neerlandés (2010, 81) sostiene que el racismo polariza a partir de cuatro "meta-estrategias", a saber, "enfatizar nuestras cosas buenas", "enfatizar sus cosas malas", "disimular nuestras cosas malas" y "disimular sus cosas buenas". Pues bien, el sistema del racismo tiene como base prejuicios e ideologías que "afectan a todas las prácticas sociales (…). Y en tanto estas ideologías subyacentes son ampliamente adquiridas y confirmadas por el discurso, un análisis sistemático de las estructuras discursivas es uno de los medios más poderosos para comprender cómo el racismo es reproducido en la sociedad" (Van Dijk, 2010, 84).

En las siguientes páginas, y partiendo de las ideas previas de Van Dijk (2010), se va a tratar de mostrar "las cosas buenas disimuladas" del otro racializado y excluido históricamente. En este libro participan investigadores de México, Perú y Ecuador, para explicar las cosmovisiones matemáticas de los pueblos originarios, lo que incluye la noción de cero (que implica pensamiento abstracto complejo), geometría, astronomía, así como las matemáticas de las culturas olmeca, maya (con sus signos y preciso calendario) y náhuatl, y su refinado pensamiento lógico. Además, se aborda la matemática cañari, su lógica y el uso del Contador, y la matemática shuar de Ecuador, incluyendo su Ábaco y la numeración gestual, lo que nos recuerda la relación entre el cuerpo y el lenguaje, la importancia semiótica de las manos y los pies, temas estudiados por la lingüística cognitiva, la cual subraya la importancia de lo corporal en la comunicación (González, 2017).

El Sol y la Luna no se retrasan, son parte de un sistema inteligible que tiene como correlato el orden natural del planeta. De esta manera, se aborda la cosmogonía y la concepción del espacio de los pueblos originarios. El orden astral inspiró a los Olmecas, por ejemplo. Se aborda también el Incario (desde lo que hoy es Colombia hasta Chile): su cosmovisión, organización política, administración de recursos, numeración en base diez, contabilidad y otras herramientas como los quipus, yupanas y taptanas. A partir de los conceptos de este libro se pueden desarrollar valiosas propuestas pedagógicas y lúdicas. De la misma forma, se trata de ideas de gran relevancia (de resiliencia y colectivismo) ante el giro civilizatorio que debemos dar para eludir (o resistir) el Antropoceno.

Bibliografía

González, Daniela (2017). El cuerpo en la lingüística cognitiva. La metáfora conceptual y el embodiment. Correspondencias & Análisis, Nº 7. Páginas 187-195.

Segato, Rita (2010). Los cauces profundos de la raza latinoamericana: una relectura del mestizaje. Revista Crítica y Emancipación. Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales – CLACSO. Páginas 11-44.

Quijano, Aníbal (2000). El fantasma del desarrollo en América Latina. Revista del CESLA Número 1. Páginas 38-55.

Van Dijk, Teun (2010). Análisis del discurso del racismo. Revista Crítica y Emancipación. Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales – CLACSO. Páginas 65-94.

1

LAS MATEMÁTICAS DE LOS MAYAS Y EL PODER DE OBSERVACIÓN Y LÓGICO-ANALÍTICO DE SU CULTURA

Dr. Luis Fernando Magaña Solís

Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción

La historia humana ha sido relativamente breve y exitosa, a pesar de los numerosos tropiezos de la humanidad consigo misma. El desarrollo del cerebro de los humanos, con respecto a las demás especies, ha sido fundamental en este éxito.

La antropología nos indica que los primeros humanos aparecen en África y de ahí se extienden por todo el planeta. El dominio del fuego fue fundamental en el inicio del despegue de la especie humana con respecto de las demás especies animales. Este dominio se logra hace más de un millón de años y al parecer en África. Sin duda, el poder de observación de la relación causa-efecto fue fundamental en este descubrimiento. El diseño de herramientas fue otra gran diferencia con respecto a las otras especies de animales.

Los diferentes grupos humanos que se fueron dispersando hacia diversas regiones del planeta, fueron desarrollando maneras propias de comunicarse y de relacionarse entre los individuos de cada grupo. El desarrollo de la agricultura (que se empieza en el mundo hace alrededor de 10,000 años) ciertamente cobija el inicio de diversas civilizaciones en diferentes partes del orbe.

Las civilizaciones del continente americano provienen de grupos humanos que migran del continente asiático a través del estrecho de Behring y también llegan de las islas del océano pacífico del sur. Al parecer, los primeros grupos se introducen en el continente americano hace alrededor de 33,000 años y se extienden por el territorio gradualmente (Ardelean et al. 2020).

Se sabe actualmente que la agricultura en América comienza también hace alrededor de 10,000 años, como en otras partes del mundo y da inicio en México (en Mesoamérica) y en la región andina (Balter, 2007). Se sabe que la agricultura en América no comienza con la domesticación del maíz, sino con el cultivo de raíces El descubrimiento y domesticación del maíz es el punto de inicio y desarrollo de las civilizaciones de América (James et al, 1989).

La cultura Maya que se desarrolla en una parte de la región actualmente conocida como Mesoamérica abarcó un territorio de unos 360,000 km2. Este territorio incluye lo que actualmente es una parte de México, todo Guatemala y todo Belice y partes de Honduras y El Salvador. Es una región inhóspita de selvas tropicales y subtropicales. Es un territorio con características muy pobres, para desarrollar centros poblacionales, con respecto al que ocuparon la mayoría de otras civilizaciones avanzadas de la misma época en el Viejo Mundo. La Maya es una de las culturas de América que más ha sido estudiada y es considerada entre las civilizaciones más extraordinarias del planeta. Si bien algunas culturas de Mesoamérica fueron más poderosas que la cultura Maya, también es cierto que ninguna otra la superó en su gran refinamiento ni en sus asombrosos logros intelectuales. En palabras de Morley (1972) “es la civilización más brillante del Nuevo Mundo.” Y agrega: “El refinamiento estético del arte y de la arquitectura maya, la exactitud de su sistema astronómico, lo complicado de su sistema calendárico, la habilidad y elaboración de sus sistemas matemático y de escritura, no han sido superados por ninguna otra cultura del Nuevo Mundo y han sido igualados por muy pocas en el Viejo Mundo. Los mayas pueden muy bien emerger hacia una comparación desapasionada, entre las grandes culturas del mundo”.

El descubrimiento y uso del cero en el mundo

Ifra (2001), en su prolijo y bello libro sobre "La historia Universal de las Cifras", hace un recuento lleno de admiración por la invención y uso del cero y por el sistema de numeración maya. Sin embargo, agrega que el sistema no era estrictamente vigesimal pues dice que, en la tercera posición, en lugar de utilizar $20^2 = 400$, menciona que los mayas usaban 360 y después continuaban con multiplicaciones por 20. Finalmente agrega que esa anomalía anulaba la enorme ventaja de su creación del cero porque ese sistema vigesimal modificado no podía usarse para las operaciones de cálculo.

Demostraremos que este señalamiento es por desinformación de este autor. Incluso plantea una pregunta muy curiosa, refiriéndose a los cálculos astronómicos consignados en el Códice de Dresde:" ¿por qué este sistema no era estrictamente vigesimal, mientras la numeración oral sí lo era?

Fray Diego de Landa (1986) responde a la pregunta en su célebre libro La Relación de las cosas de Yucatán, escrito en el siglo XVI [Diego de Landa, 1986] que, en el inicio de su Capítulo 24 De la manera de contar de los yucatecos señala: "Que su contar es de 5 en 5 hasta 20 y de 20 en 20 hasta 100 y de 100 en 100 hasta 400 y de 400 en 400 hasta 8 mil y de esta cuenta se servían mucho para la contratación del cacao. Tienen otras cuentas muy largas y que las extienden ad infinitum, contando 8 mil veinte veces, que son 160 mil, y tornando a 20 duplican estas 160 mil, y después de irlo así duplicando, hasta que hacen un incontable número, cuentan en el suelo o cosa llana."

Claramente, Diego de Landa señala que en la vida cotidiana de los comerciantes del cacao se realizaban las cuentas con un sistema de base 20, donde en la segunda posición es $20^2 = 400$ y era estrictamente vigesimal. Realizaban sus operaciones "en el suelo o cosa llana." Además, de manera directa tenemos que esta circunstancia es completamente congruente con que la numeración oral de los mayas era también estrictamente vigesimal. El hecho de que en el Códice de Dresde las cuentas están realizadas con la base vigesimal modificada es simplemente, para facilitar las predicciones en el tiempo en términos de años solares. Esta modificación del sistema estrictamente vigesimal es un artificio muy inteligente de los astrónomos mayas. Es claro que, como señala Diego de Landa, en la vida cotidiana de los comerciantes y en otras actividades que lo requirieran, la base estrictamente vigesimal era la que se usaba. Con esto queda cubierta la desinformación manifestada en el libro de Ifra.

Por otro lado, con respecto al Viejo Mundo, Logan (1979) señala que la historia del cero en realidad comienza con los babilonios, mucho antes de que los griegos o los hindúes se involucraran en sus respectivos estudios matemáticos. Los babilonios usaban una noción muy primitiva de cero, que, por una u otra razón, nunca pudieron desarrollarla como lo hicieron posteriormente los hindúes. Los escribas babilónicos usaban un símbolo para indicar un espacio en blanco que se usaba como marcador de posición. Estaban a punto de desarrollar un sistema de numeración de lugares, pero por alguna razón desconocida nunca fueron capaces de ir más allá de esta etapa primitiva. No usaron su cero, por ejemplo, para distinguir entre 60,1 y 1/60 en su sistema numérico de base sexagesimal (60). Tampoco hay indicios de que alguna vez pensaron en el cero como un número para sumar o restar o para simplificar sus cálculos.

Logan (1979) demuestra que, en el Viejo Mundo, el uso del cero en los cálculos aparece por vez primera en la India, en el manuscrito Bakhshali (200 d. C.) donde también se encuentra el uso del valor posicional. Las operaciones de suma y resta con cero aparecen por primera vez en el año 505 D.C.

Con respecto al uso del cero entre los mayas, este mismo autor señala que los mayas usaban un sistema que era una mezcla de la base 20 y 18. El año maya de 360 días se dividía en 18 meses de 20 días cada uno. Sus números se usaron para representar el número de días entre eventos astronómicos. Añade que ellos, al igual que los babilonios, solo usaban su cero para la señalización de lugares, de modo que solamente se usaba para contar y nunca entraba en cálculos aritméticos como la multiplicación o la división; como en caso del cero babilónico.

Claramente, este autor comete el mismo error que Ifra (2001) en cuanto a la información de la manera de usar el sistema estrictamente vigesimal en la vida cotidiana, especialmente entre comerciantes y algunos artesanos y arquitectos que necesitaban realizar cálculos y el sistema vigesimal modificado para su aplicación a cálculos de la duración de los fenómenos astronómicos en años solares.
Aquí señalamos que los mayas, entre los siglos IV y III a.C., concibieron un sistema de numeración vigesimal y posicional basado en el uso del cero que, "todavía hoy permanece como una de las obras más brillantes del intelecto del hombre" (Morley, 1972).

Como consecuencia de lo señalado en los párrafos anteriores, es claro que la civilización maya fu e la primera en el mundo en usar la abstracción del número cero en un sistema numérico. Se adelantaron alrededor de 600 años a las civilizaciones de la India que fueron las primeras en realizar este logro matemático en el Viejo Mundo.

E sta temprana creación de un poderoso sistema numérico que incita al razonamiento y que desarrolla la capacidad de observación, de análisis y síntesis de quienes lo practican, como veremos a continuación, marca su influencia en la cultura maya, en su enfoque de vida, en su arte y en el diseño de sus ciudades, muchas de las cuales eran auténticos relojes astronómicos.

Las Matemáticas Mayas

La Cultura maya tenía una gran preocupación por la precisión en la predicción de los fenómenos astronómicos. En un medio geográfico difícil para desarrollar una civilización, donde básicamente hay dos estaciones en el año, la seca y la lluviosa, era muy importante determinar el momento de preparar el campo para la siembra.

La Duración del Año en días
Por la astronomía moderna: ***365.2422***
Según la astronomía maya: ***365.2420***
Por nuestro calendario civil actual: ***365.2425***
Por el calendario juliano a la llegada de los españoles a América: ***365.2500***
(Abell, 1969, p. 150-152; Morley, 1972, p. 365)

El 4 de octubre de 1582 fue el día elegido por el Papa Gregorio XIII para hacer efectivo el cambio que promulgó públicamente el 24 de febrero del mismo año, por el que el calendario juliano (creado por Julio César) era modificado, entrando en vigor el calendario gregoriano. Para esa fecha, el calendario juliano tenía un desfase ya grande. El desfase que se calculó que existía era de 10 días. El día 5 de octubre de 1582, fue cambiado por el 15 de octubre de ese mismo año, desapareciendo los 10 días citados.

La evidencia muestra que la cultura maya logró con gran precisión, entre otras cosas, predecir la duración del año, el ciclo lunar las revoluciones sinódicas de Venus, el paso de Venus por el disco solar, los movimientos de Marte, los eclipses de Luna, los eclipses de Sol entre otros logros. Pudieron determinar el periodo lunar con tan sólo 24 segundos de diferencia con respecto al medido con la tecnología de hoy. Asimismo, lograron un calendario muy preciso sobre las apariciones de Venus, válido por cuatrocientos años. Aparentemente fue la primera cultura en el mundo, en realizar el primer registro sobre el paso de Venus sobre el disco solar. El calendario de estos fenómenos está en el Códice de Dresde que es un almanaque astronómico.

Es claro que, sin una herramienta matemática suficientemente poderosa y precisa como base, los mayas no hubieran podido desarrollar con tanta perfección sus cómputos astronómicos ni su medida del tiempo.

Los mayas hacían uso de dos sistemas para representar los números: los numerales de puntos y rayas y los numerales en forma de cabeza. Para los cálculos, utilizaban la notación de puntos, rayas y el cero. Así, en lugar de 10 signos, como nosotros, usaban solamente tres.

Entendamos cómo era su sistema numérico. En nuestro sistema decimal, cuando escribimos un número tenemos una suma implícita. Por ejemplo:

$4283 = 4X\ 10^3 + 2X10^2 + 8X10^1 + 3X10^0 = 4000 + 200 + 80 + 3$.
Recordemos que $10^3 = 1000$; $10^2 = 100$; $10^1 = 100$; $10^0 = 1$. De hecho, cualquier número elevado a la potencia cero es cero.
Los mayas hacen lo mismo, pero generalmente de manera vertical, con base vigesimal y utilizando solamente tres símbolos:

El punto: ●
la barra: ▬
y el caracol:  para el cero.

Por otro lado, con su base 20 modificada, utilizada para cálculos calendáricos, los antiguos mayas podían fijar cualquier fecha dada en su cronología con precisión tan grande, que no podía repetirse hasta después de haber transcurrido un lapso de 374,440 años. Una hazaña cronológica no igualada.

Con estos tres signos podían realizar las operaciones fundamentales. Las ventajas de usar puntos, rayas y caracoles son muy notorias en la realización de esas operaciones aritméticas. El método resultante no requiere tablas de ningún tipo. Es un maravilloso procedimiento matemático que es intuitivo y dinámico. Puede ser una poderosa herramienta en la enseñanza de las matemáticas porque da un conocimiento intuitivo de los algoritmos matemáticos básicos y por añadidura, es muy divertido (Sánchez, 1961 y Calderón, 1966).

En lo que sigue describiré el sistema vigesimal maya y mi conversión a nuestro sistema numérico decimal, de las operaciones matemáticas fundamentales: la suma, la resta, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada que he presentado como mi propuesta de enseñanza alternativa de las matemáticas (Magaña, 2012 y Magaña, 2004).

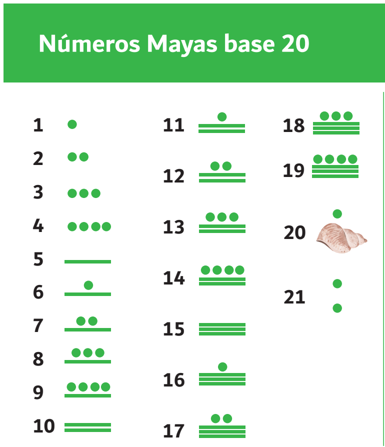


Figura 1

Figura 2

La figura 1 muestra los primeros 21 numerales mayas en base 20. La figura 2 muestra los bloques de potencias de 20 y el número 2015. Por completez, mostramos en la figura 3 la base 20 modificada que se utilizaba para los cálculos calendáricos. En la figura 4 mostramos los números mayas en base 10. En las cuatro figuras estamos utilizando un tablero que se conoce como el "ábaco maya."

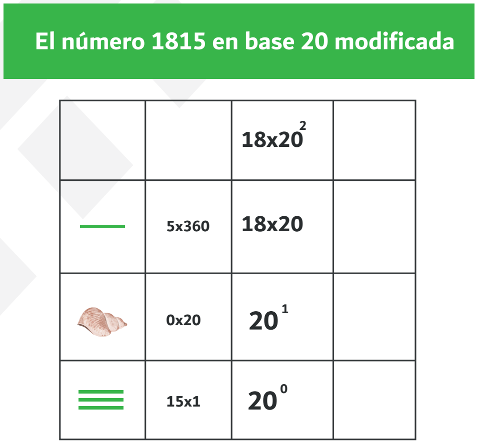


Figura 3

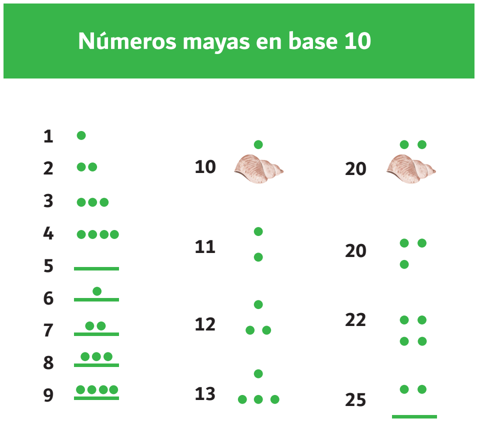


Figura 4

Figura 5

Nótese que 5 puntos equivalen a una raya y que el espacio queda virtualmente separado verticalmente en bloques de potencias de 20.

Utilizaremos la metodología que, muy probablemente, utilizaban los mayas para realizar sus operaciones, pero lo haremos en base 10 por razones de claridad.

Usaremos las siguientes reglas para la numeración maya en base 10:

1. 2 rayas en un nivel equivalen a 1 punto en el nivel inmediato superior.
2. (cuando se usa la base 20, en lugar de considerar 2 rayas al nivel inmediato superior, se consideran 4)
3. 1 punto en un nivel equivale a 2 rayas en el nivel inmediato inferior.
4. (cuando se usa la base 20, en lugar de considerar 2 rayas al nivel inmediato inferior, se consideran 4)
5. 5 puntos en un nivel equivalen a 1 raya en el mismo nivel.
6. 1 raya en un nivel equivale a 5 puntos en ese nivel.

Suma

En las figuras de 6 a 8 mostramos la suma: 432+231.

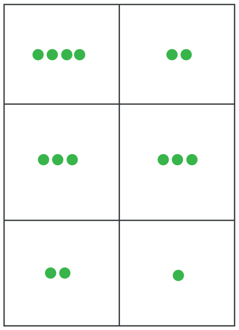


Figura 6

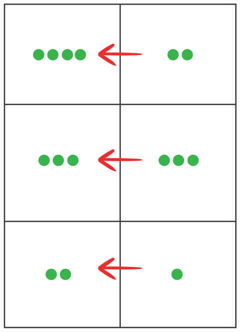


Figura 7

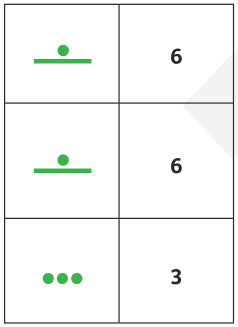


Figura 8

El concepto matemático de suma que, se adquiere de manera rápida y clara, es que sumar es juntar. Aquí, se juntan los puntos nivel a nivel y de una manera rapidísima, obtenemos el resultado: 432+231 = 663. La conmutatividad de la suma es un concepto que se adquiere inmediatamente, ya que da lo mismo juntar todo en la columna de la izquierda que en la columna de la derecha. Nótese que utilizamos la regla de que cinco puntos equivalen a una raya.
Consideremos una suma un poco más elaborada: 281+135:

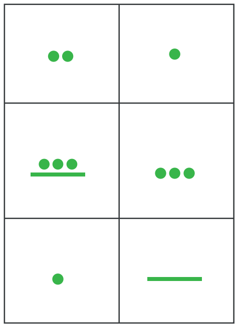


Figura 9

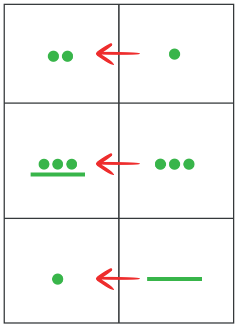


Figura 10

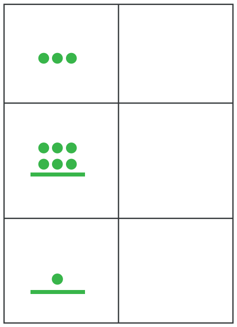


Figura 11

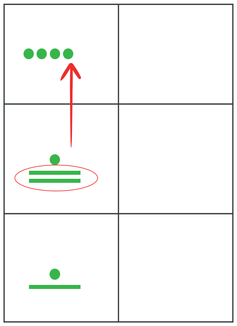


Figura 12

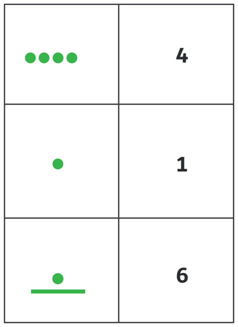


Figura 13

Hemos vuelto a juntar nivel a nivel, hemos utilizado la regla de que cada cinco puntos requivalen a una raya y que dos rayas son equivalentes a un punto en el nivel inmediato superior, como se muestra en la figura 12. El resultado que se obtiene muy fácilmente es 281+135 = 416

Resta

En las figuras de la 14 a la 16 mostramos la resta: 643-342.

El concepto matemático de restar es quitar y lo hacemos en cada nivel, empezando por el nivel inferior. Cada punto elimina un punto y cada raya elimina a una raya.

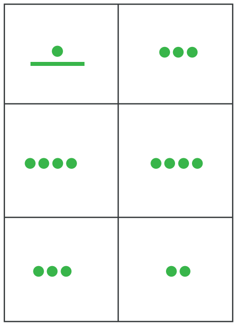


Figura 14

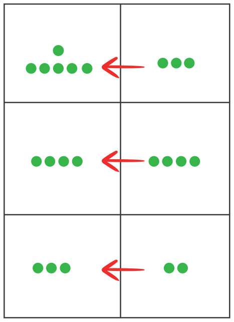


Figura 15

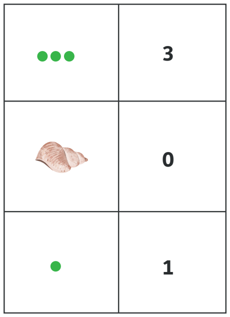


Figura 16

Nótese que, en nivel superior, para poder eliminar dos puntos convertimos primeramente la raya en cinco puntos y luego procedemos a la eliminación. Llegamos rápidamente al resultado: 643-342 = 301.

Consideremos ahora un ejemplo un poco más elaborado: 301-150. Mostramos el proceso en las figuras de la 17 a la 20. Vemos que, en el nivel inferior, el caracol no elimina nada. En el nivel intermedio, una raya debe eliminar una raya, pero tenemos nada, tenemos el caracol. Así que bajamos un punto del nivel inmediato superior para convertirlo en dos rayas, como se muestra en la figura 19, de tal manera que nos quedan dos puntos en ese nivel. Ya podemos eliminar una raya. Finalmente, en el nivel superior eliminamos un punto, de los dos que nos quedaban después de haber bajado.
Uno al nivel inmediato inferior y ya tenemos el resultado que se muestra en la figura 20: 301-150 = 151.

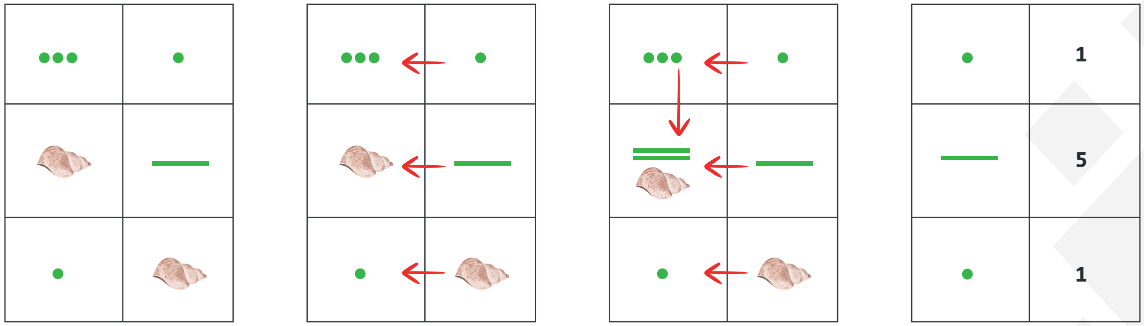


Figura 17 Figura 18 Figura 19 Figura 20

Multiplicación

Vamos a realizar la multiplicación 135 X 23. No necesitamos tablas de multiplicar. Colocamos los factores por fuera del tablero, como se muestra en la figura 21. Ahí hemos colocado el número 135 verticalmente y el número 23 horizontalmente. El concepto matemático para la multiplicación es replicación, repetición.

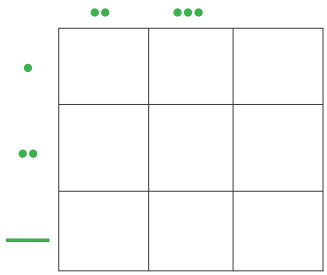


Figura 21

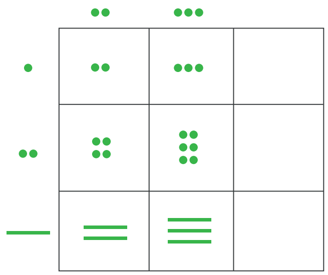


Figura 22

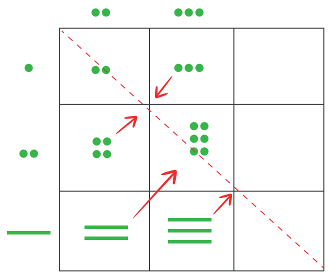


Figura 23

Vamos a replicar en cada casilla la figura que tenemos a la izquierda por fuera del tablero, tantas veces como lo indique el número de la parte superior, o lo recíproco, procederemos de la manera que resulte más práctica y directa como se ilustra en la figura 22. Así, en la casilla superior izquierda colocamos dos veces un puno, o una vez una pareja. Es exactamente lo mismo. La conmutatividad de la multiplicación se entiende inmediatamente. En la casilla inmediata inferior de esa columna colocamos dos parejas y en la inferior, dos rayas. Con eso hemos concluido la primera columna. Procedemos a llenar la segunda columna. En la casilla superior de la segunda columna colocamos una tercia de puntos; en la inmediata inferior, dos tercias de puntos y en la casilla inferior ponemos tres rayas (o cinco tercias que es lo mismo). Desplazamos los resultados de cada casilla hacia la diagonal principal del tablero, como se muestra en las figuras 23 y 24. Leeremos el resultado de la multiplicación a lo largo de esa diagonal principal, considerando que las unidades corresponden al nivel inferior de la misma.

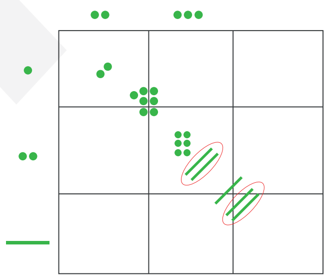


Figura 24

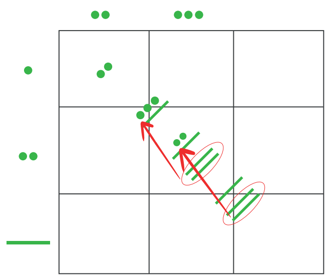


Figura 25

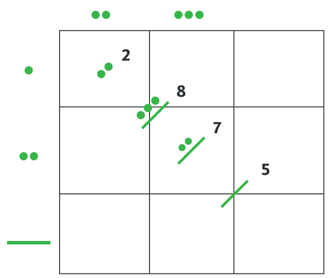


Figura 26

Primeramente, procedemos a realizar las transformaciones pertinentes: cada cinco puntos se transforman en una raya en cada nivel y cada dos rayas en un nivel se convierten en un punto en el nivel inmediato superior, como se muestra en la figura 25. Después de realizar las transformaciones leemos el resultado de la multiplicación: 135 X 23 = 2875. Todo fue rápido y sin tablas memorizadas.

División

Vamos a realizar la división 273 ÷ 13. Consideramos a la división como la operación inversa de la multiplicación y así la realizaremos. De este modo, el dividendo se concibe como el resultado de la multiplicación de dos números, uno de ellos es el divisor y el otro, desconocido, es el cociente. Por tanto, el dividendo se coloca en la diagonal del tablero, como se muestra en la figura 27. Colocamos el divisor por fuera del tablero, ya sea vertical u horizontalmente. En nuestro caso lo hemos colocado verticalmente. El resultado irá apareciendo en la parte superior externa del tablero. Procedemos, como en cualquier división, por ensayo y error.

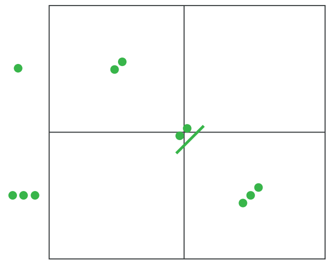


Figura 27

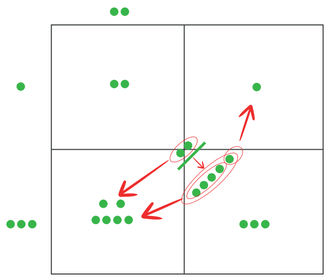


Figura 28

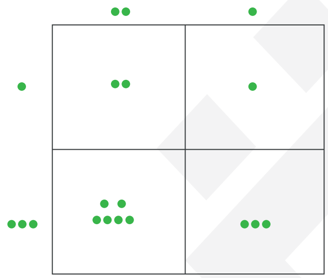


Figura 29

Empezamos por proponer un dígito en la parte exterior de la casilla superior de la primera columna. Analizamos de la siguiente manera. En la casilla superior de la columna de la izquierda tenemos una pareja de puntos. Esta pareja se originó de reproducir el punto que tenemos a la izquierda por fuera tantas veces como el número que estamos buscando. Por tanto, ese número corresponde a una pareja de puntos que colocamos como se muestra en la figura 28. Esa casilla superior de la columna de la izquierda ya quedó bien resuelta. Ahora, para resolver correctamente la casilla inferior de la misma columna, deberemos tener dos tercias de puntos. Para lograrlo, tomamos de la diagonal los dos puntos y los trasladamos a esa casilla, como se muestra en la figura 28. Parece un error porque en el 6, no hay raya. Pero, podemos cambiar la raya por cinco puntos y tomamos cuatro de ellos para pasarlos a la misma casilla. Con esto completamos las dos tercias de puntos que necesitamos en esa casilla y ya queda resuelta. El quinto punto de la raya que cambiamos a cinco puntos pasa a la casilla superior de la segunda columna., como se muestra en la misma figura 28. Ya la columna de la izquierda quedó resuelta. Pasamos a la segunda columna. En la casilla superior de esta columna tenemos un punto. Para proponer un dígito en la parte externa de esta casilla procedemos de la misma manera. Ese punto se originó de reproducir un punto tantas veces como el número que estamos buscando. Claramente la solución es un punto. Además, la casilla inferior de la segunda columna ya queda resuelta con esta propuesta. Pues en ella debemos tener tres puntos que son los que tenemos. La división ya concluyó y es exacta: 273 ÷ 13 = 21.

Pasemos ahora a la raíz cuadrada.

Raíz cuadrada

Consideramos a la raíz cuadrada como una división en que conocemos el dividendo (que es el radicando) pero no conocemos el divisor ni el cociente, pero sabemos que son iguales entre sí. Utilizaremos este esta característica para resolver el problema. Extraeremos la raíz cuadrada de 225. Como es una división, colocamos el radicando a lo largo de la diagonal, como se muestra en la figura 30

.

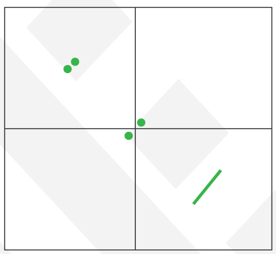


Figura 30

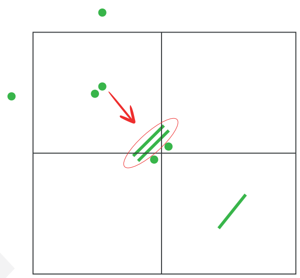


Figura 31

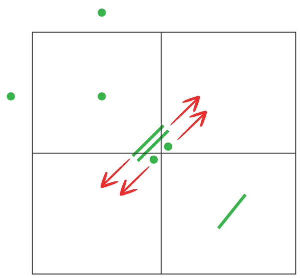


Figura 32

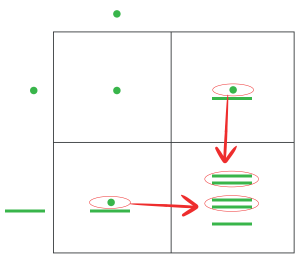


Figura 33

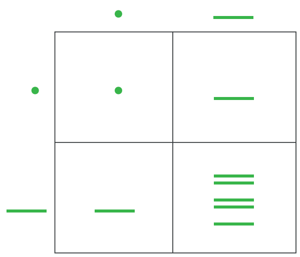


Figura 34

Razonamos de la manera siguiente. La casilla superior de la columna de la izquierda tiene dos puntos. Estos puntos se originaron de la multiplicación de dos factores iguales. Si proponemos dos puntos como factor en cada lado, necesitaríamos tener cuatro puntos en esa casilla, pero solamente hay dos. Así que debemos proponer un número más pequeño. Lo intentamos con un punto, como se muestra en la figura 31. De este modo, el punto que nos sobra en la casilla baja al nivel inmediato inferior como dos rayas, como se ilustra en la misma figura 31. Con esto ya resolvimos la casilla superior de la columna de la izquierda. Posteriormente, dado que los factores que estamos buscando deben ser iguales, separamos de la manera más equitativa posible los elemento que tenemos en el cruce de líneas. Asi, movemos una raya y un punto a la casilla superior de la columna de la derecha y a la casilla inferior de la columna de la izquierda respectivamente, como se muestra en la figura 32. Pasamos a resolver la casilla superior de la columna de la derecha. Proponemos como factor una raya de cada lado, como se muestra en la fIgura 33. Con esto, vemos que en la casilla inferior de la columna de la izquierda nos sobra un punto que bajamos al nivel inmediato inferior como dos rayas. Lo mismo ocurre con la casilla superior de la columna de la derecha y bajamos otro punto a la casilla inmediata inferior y se convierte en dos rayas adicionales en la misma casilla. Nos falta resolver únicamente la casilla inferior de la columna de la derecha. Vemos que en esa casilla deberemos tener cinco rayas y son exactamente las que tenemos. Hemos concluído la raíz cuadrada que queda como se muestra en la figura 34. Por tanto, el resultado de la raíz cuadrada de 225 es 15. Nótese que fácilmente podemos verificar que el resultado es correcto, pues realizando el producto de 15 X15 que está en la figura 34 nos da precisamente 225.

Resulta claro que las matemáticas mayas por su naturaleza incitan al razonamiento. Constituyen un proceso lógico, lúdico y poderoso que resulta muy atactivo a los niños y adultos para aprender y comprender el razonamiento matemático.

Para finalizar esta sección, mencionaremos las evidencias lingüísticas del uso de las matemáticas entre los mayas. En la lengua maya existen vocablos para las operaciones fundamentales y conceptos matemáticos (Pío, 1866; Solís, 1949): para cero: mixbaal, ich; suma: buc-xocil, cuch-xocil; sumar: buc-xoc; restar: cabaltal, chichan-cunah; multiplicar: dzac-xoc; división: hatzil, hatz-xocil; remanente ó residuo: u yala; igualdad: cetil; infinito: bakliz, maxulunte.

Manifestaciones del pensamiento lógico analítico de la Cultura Maya

Es claro que las operaciones matemáticas que hemos descrito, no requiren memorización de tablas de ningún tipo, solamente requieren análisis y lógica. De este modo, todas aquellas personas que se adentran en la práctica de esta manera de realizar las operaciones fundamentales desarrollan su capacidad lógica-analítica en matemáticas, que se aplica a todas las situaciones de la vida de un ser humano. De aquí que los sacerdotes mayas y otras personas que fueron iniciadas en este tipo de cálculos, desarrollaban estas capacidades que se transmitían a la sociedad y se veían reflejadas en la generación de conocimiento.
Sin embargo, el poder de observación, seguido del análisis y de la síntesis precedió al establecimiento del portentoso sistema matemático. Un ejemplo lo constituye la choza maya que se traza y construye en la actualidad del mismo modo que desde alrededor de 4 mil años (Rivas, 2012).

> Las dimensiones de esta choza se dan en "varas", en donde una "vara" es la altura del piso a la cintura del futuro dueño de la choza. Es una choza construída a la medida de su dueño. La planta está trazada en el piso con dos circunferencias que se tocan pero no se cortan y luego siguen maneras precisas de armarla con troncos de árboles y con palmas. Además, tiene los siguientes pricipios básicos transmitidos de generación en generación: Busca el Sol, para que en la mañana te despierte y te acompañe a la milpa y por la tarde lo invites a descansar contigo. Traza la línea madre, ella te dice cómo hacer la casa. En la línea madre, traza la planta de la casa. No hagas tu casa más grande que tú, vas a vivir incómodo, no hagas tu casa más chica que tú, vas a vivir incómodo, hazla de seis varas, pues esa es la casa de un gran señor. (Rivas, 2012, p....).

Cabe señalar que la línea madre es de norte a sur.

Por otro lado, tenemos la arquitectura de las ciudades mayas. Las ciudades más importantes por su riqueza y poder político, eran auténticos relojes astronómicos. Para lograr esto, era necesario el poder de observación, de análisis y de cálculo. Se requerían mentes entrenadas en la lógica-analítica propia de su sistema matemático, así como conocimientos de geometría y de astronomía. En fechas importantes del año se daban fenómenos de luz y sombras en las ciudades cuyos habitantes observaban extasiados, sintiendo una comunicación directa con el cosmos, con los dioses.

Las evidencias muestran que sus grandes ciudades fueron planificadas con un trazo bien definido y ordenado (Morley, 1972). Con las casas de los sacerdotes y dirigentes al centro y las de personas menor jerarquía iban alejándose del centro en un patrón bien ordenado. Además, en la península de Yucatán, donde no existen aguas superficiales, ni ríos ni lagos, solamente unas poquísimas lagunas de agua dulce, las ciudades se fundaban cerca de los cenotes para el aprovisionamiento de aguas. Sin embargo, fundaron muchas

ciudades lejos de cenotes, fabricando chultunes que eran cisternas con paredes impermeables en las que recolectaban agua de lluvia. También fabricaron en la zona de la baja serranía, embalses pavimentados con piedra donde acumulaban miles de metros cúbicos de agua de lluvia. Todo esto se puede ver las ciudades de la llamada Zona Puuc, situada en la parte sur del actual Estado de Yucatán en México. Sin duda alguna, todos estos hechos nuevamente apuntan hacia el poder de observación y de análisis de la cultura maya.
Cabe señalar que diseñaron importantes sistemas de riego y que alrededor de la mayoría de sus ciudades substituían a los árboles de la selva por árboles frutales. También construyeron un sistema de caminos (sac-bés) con pavimento de piedra que recorrían a pie viajeros y comerciantes, pues carecían los mayas de animales de tiro y que comunicaban a sus grandes ciudades. Casi todos ellos realizados en línea recta. Estos caminos todavía existen y pueden ser recorridos y son cientos de kilómetros en la península de Yucatán.
La predicción de los eclipses de Luna y de Sol, además de la predicción de la desaparición de Venus en el cielo de la tarde para luego aparecer en el cielo de la mañana, eran manifestaciones espectaculares de ese poder analítico y de la aplicación de lógica-matemática de la clase dominante. La población asombrada y maravillada de tener fechas para observar estos acontecimientos astronómicos plasmados en almanaques, de modo que no dejaban de percibir un orden en el cosmos que, a su vez, estimulaba su poder de observación y análisis.

Claramente podemos notar la influencia que sus matemáticas tuvieron en su manera de vivir y de concebir el universo y su relación con él.

En otro aspecto, en las artes, en la escultura, en la cerámica, en la pintura, con gran balance de simetrías y formas de mucha elegancia y exquisitez, se manifiesta otra vez este poder lógico-analítico de la cultura maya que se suma a su sensibilidad. El conocimiento del pigmento azul para sus murales, llamado el “azul maya”, famoso en el mundo por su perdurabilidad en los murales abandonados y perdidos en la selva por muchos siglos, constituye otro ejemplo.

Este poder de observación, análisis y síntesis se extiende a la herbolaria para uso medicinal. Fray Diego de Landa (1986) narra cómo usaban de manera muy efectiva hierbas para curar inflamaciones y llagas y las encías. Otras para teñir sus telas y esteras.
En su literatura, el Popol Vuh, es una obra de gran relevancia. Muestra en su estructura y concepción, la profundidad de pensamiento, análisis y síntesis alcanzado por la civilización maya. Cuando nos comenta Girard (1977) en su bello y extenso libro “Origen y desarrollo de las civilizaciones antiguas de América”, nos dice de ella (citando textualmente):

Esta obra maestra del ingenio maya-quiché no cede en valor filosófico a los libros que han guiado la conciencia humana, como la Biblia, los Vedas, el Zend Avesta, los King, los libros de Brahma, el Talmud, el Corán, los Tantras o Puranas, pero por su valor historiográfico, por consignar fechas los supera a todos, incluso a la Biblia. El POPOL-VUH es una de las obras más grandiosas del pensamiento universal. Enriquece el patrimonio cultural de la Humanidad.

Referencias

Abell, G. (1969). Exploration of the Universe. (2ª ed.). Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York, p. 150-152

Ardelean, C., Valdivia, L., Pedersen, M. et ál. (2020). Evidence of human occupation in Mexico around the Last Glacial Maximum. Nature, 584, 87-92. https://www.nature.com/articles/s41586-020-2509-0

Balter, M. (2007). Seeking Agriculture's Ancient Roots. Science, 316, 1830-5833. 10.1126/science.316.5833.1830

Calderón, H. (1966). La Ciencia Matemática de los Mayas. Editorial Orión, México.

Fray Diego de Landa. (1986). La Relación de las Cosas de Yucatán. Editorial Porrúa.

Girard, R. (1977). Origen y desarrollo de las civilizaciones antiguas de América. Editores Mexicanos Unidos, S. A.

Ifra, G. (2001). Historia Universal de las cifras. (4ª ed.) Espasa Calpe.

James, S., Dennell, R. Gilbert, A., Lewis, H., Gowlett, J., Lynch, T., McGrew, W., Peters, C., Geoffrey, G. y Stanl, A. (1989). Hominid Use of Fire in the Lower and Middle Pleistocene: A Review of the Evidence. Current Anthropology, 30(1). https://doi.org/10.1086/203705].

Logan, R. (1979). The mystery of the Discovery of zero. ETC: A Review of General Semantics (36) 1, 16–28. http://www.jstor.org/stable/42575888)

Magaña, L. (2004). La Radice Quadrata con L'Aritmetica Maya. Calcolo Matematico Precolombiano. Atti del Convegno tenutosi all'IILA il 21 ottobre 2003. pp. 321-339.

Magaña, L. (2012). Sayab: para aprender matemáticas: Matemáticas Mayas. Secretaría de Educación del Estado de Yucatán.

Morley, S. (1972). La Civilización Maya. Fondo de Cultura Económica.

Pío, J. (1866). Diccionario de la Lengua Maya. Imprenta Literaria de Juan Molina Solís.

Rivas, D. (2012). La Choza Maya. Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán.

Sánchez, G. (1961). Arithmetic in maya. Editorial Self Published, Austin.

Solís, E. (1949). Diccionario Español-Maya. Editorial Yikal Maya Than.

2

NEPOHUALTZITZIN TRADICIÓN CULTURAL HISTÓRICA DE LA CIENCIA MATEMÁTICA EN MESOAMÉRICA

Magíster Everardo Lara González

Introducción

A través de las matemáticas podemos entender la visión del mundo y las leyes de la naturaleza, desde el origen del universo. En el transcurso de la historia, varios pueblos se han destacado por su preocupación en el estudio y la enseñanza de las matemáticas, disciplina que surgió cuando los seres humanos iniciaron la cuantificación y cualificación de objetos y fenómenos naturales. Crearon y desarrollaron diferentes símbolos para representar ideas, formas o mensajes; fue así como surgió la escritura y, en consecuencia, la aparición de numerales que representan una forma de pensar.

Los pueblos mesoamericanos, en su tradición cultural histórica, crearon, compartieron, transmitieron y modificaron el mensaje social de sus propios sistemas numéricos simbólicos, partiendo de un fundamento filosófico que coincide con la visión de otras grandes culturas del mundo, quienes también creyeron que los principios de las matemáticas eran el principio de orden de todos los seres.

La aplicación de la tradición cultural e histórica de las matemáticas mesoamericanas permite ampliar el análisis, razonamiento e interpretación matemático, para que las nuevas generaciones tengan acceso a la estructura del sistema de pensamiento antiguo mesoamericano, guía de una relevante organización socio-cultural, donde se conozca su significado y enriquezca la solución e interpretación lógica de un sistema de símbolos y situaciones tales como:

- Los antiguos sistemas de representación: olmeca, maya y náhuatl.
- El simbolismo de pirámides en los centros ceremoniales.
- Rituales y de eventos: de fiestas o tradiciones de todo el continente americano donde actualmente participamos y que pertenecen a las prácticas sociales matemáticas.

A continuación, se desarrolla la teoría pedagógica, las bases de la cosmovisión de los pueblos mesoamericanos considerados: Olmeca, Maya, Nahuatl; sus numerales con su interpretación, su uso en sus culturas y la construcción del lenguaje náhuatl.

Teoría pedagógica de Lev Semionovich Vygotsky: Su teoría sociocultural consiste en profundizar en la influencia de un ambiente sociocultural en el desarrollo cognitivo de los niños. Ese entorno sociocultural se puede mejorar desde la tradición cultural histórica y cosmovisión mesoamericana.

Tradición cultural histórica: La tradición es un acervo intelectual creado, compartido, transmitido y modificado socialmente, compuesto por representaciones y formas de acción, en el cual se desarrollan ideas y pautas de conducta con que los miembros de una sociedad hacen frente individual o colectivamente, de manera mental o exteriorizada, a las distintas situaciones que se les presentan en la vida (López, 2008).

Cosmovisión: Es la estructura de pensamiento de una cultura, producida por la interrelación social en forma de red sistémica (López, 2008).

Aplicando la integralidad de la interpretación de la ciencia matemática mesoamericana a teoría pedagógica del constructivismo social,esta se incorpora actualizando su conocimiento como ciencia de origen, logrando la comprensión de la realidad de los saberes tradicionales a través de sus múltiples lenguajes con formas de acción permitiendo darle el sentido científico y que se diluya la abstracción.

La matemática mesoamericana cumple la idea de los opuestos complementarios teniendo una matemática de valores cuantitativos y otra matemática de valores espirituales.

Esto de acuerdo a lo descrito por Alfredo López Austin, "La constitución real de Mexico Tenochtitlan "

El estado intervenía rígidamente en la vida de los mexicanos, no sólo debido a sus precisos y magnos fines de sostén universal a través de la colaboración del hombre con los dioses, sino por imitación sobre la tierra del principio de ordenamiento matemático de la divinidad.

Los antiguos sistemas de representaciónmatemática: olmeca, maya y náhuatl, su interpretación de creación, transmisión y modificación, para mejorar el mensaje de evolución del pensamiento mesoamericano

Numerales olmecas

La evidencia más temprana de inscripciones simbólicas numéricas en Mesoamérica se remonta al año 1,200 a.C.; y fue hallada en un sitio arqueológico olmeca. Dichas inscripciones numéricas usan círculos o puntos y barras.

Creación de símbolos

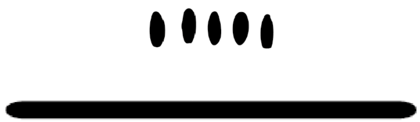


Figura 1

Transmisión de mensaje

Los Olmeca, transmitieron el principio del conteo al visualizar el cielo ordenado y la anatomía humana, como una expresión de las leyes universales del símbolo numérico.

En el proceso de observación, se percataron que los astros, como el Sol y la Luna, se mueven siempre en el firmamento, conservando un orden; aparecen y se ocultan en diferentes puntos y esos movimientos de traslación se repiten en ciertos lapsos.

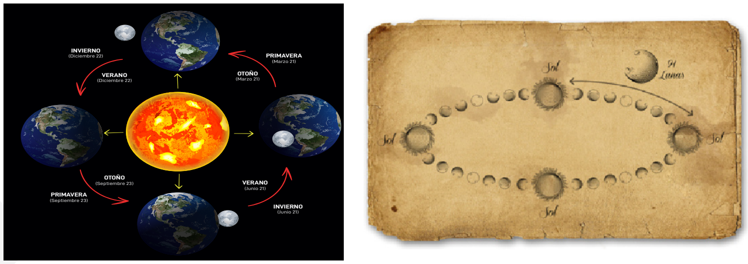


Figura 2.

Esta observación requirió del registro de esos acontecimientos que ocurren en el cielo, en la naturaleza y en su ser, se auxilia de piedras1, las colocó en la posición que muestra la visualización del tiempo mientras transcurre ordenadamente.

La imagen del Sol corresponde al registro del tiempo que se proyecta en el espacio armónico del cielo, donde el astro siempre conserva un orden en el firmamento, mostrando un punto de referencia cuando aparece y se oculta, creando la expresión numérica de la medida cuadrangular.

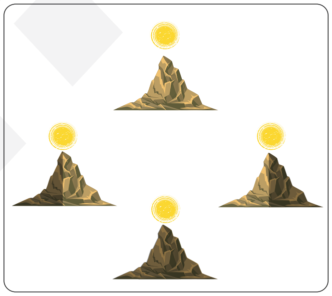


Figura 3.

El cuerpo humano se representa en sus extremidades como visión de esa medida cuadrangular y se representa como una barra.

.

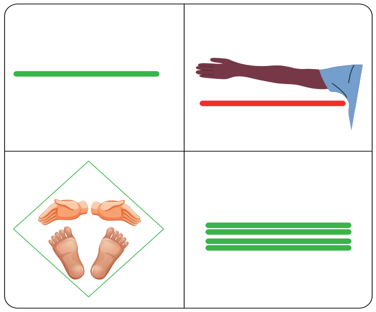


Figura 4.

Numerales figurativos de la cultura maya

La etapa del esplendor de la cultura maya en Mesoamérica ocurrió durante los siglos del tercero al décimo. Los mayas mantuvieron la creación del mensaje de la cultura olmeca en el principio de conteo, al visualizar el cielo ordenado y la anatomía humana como una expresión de las leyes universales del número.

Modificación de la transmisión del mensaje

La imagen del Sol corresponde al registro del tiempo que se proyecta en el espacio armónico del cielo, donde el astro siempre conserva un orden en el firmamento, mostrando un ***punto*** de referencia cuando aparece y se oculta, creando la expresión numérica de la medida cuadrangular. Se construyeron pirámides como referencia de las montañas para registrar los momentos de orden en la colocación del Sol con los tiempos de la naturaleza y los seres humanos.

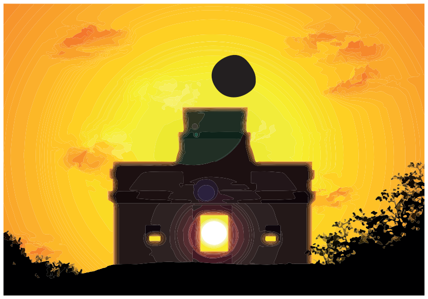


Figura 5.

Se mantiene la idea del cuerpo humano para representar con sus extremidades la visión de la medida cuadrangular. La yema de los dedos proyecta un punto que adquiere el valor de uno.

Figura 6.

Símbolo con valor de cinco

El pulgar, en posición horizontal, se representa como una barra con valor cinco porque completa la cuenta de la mano y tiene extensión en el antebrazo y en la extremidad completa.

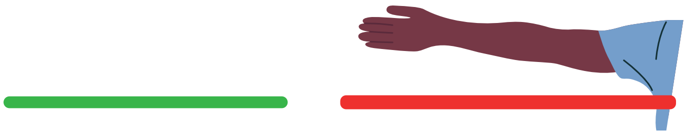


Figura 7.

Cada ser humano es una unidad vigesimal, ya que cada una de sus cuatro extremidades tiene 5 dedos (4x5=20). La palabra numérica ***hun uinic*** tiene valor de veinte, que significa ***un hombre***.

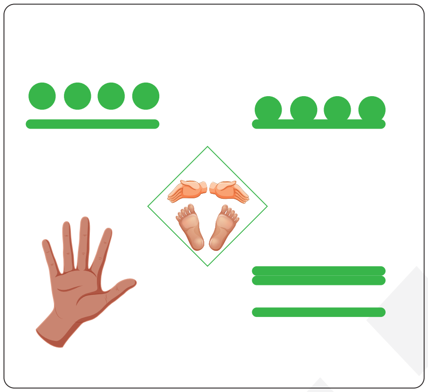


Figura 8.

Incorporación del símbolo del cero

El ascenso sutil lo representan a través de una concha de caracol, donde es evidente también la figura de una espiral que alude a la idea de trascender, de evolucionar rumbo a otras alturas en el universo.

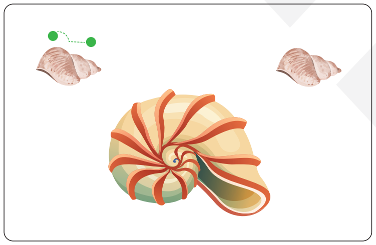


Figura 9.

Una aportación crucial de los mayas al resto de la humanidad es el símbolo del cero que origina el sistema posicional numérico.

El cero también se representa con un puño cerrado visto de frente.

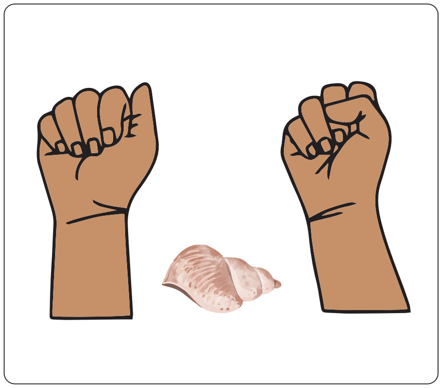


Figura 10.

El puño indica que los dedos están retenidos en un espacio cerrado, contenidos, integrados, y completos.
Las espirales como símbolo de evolución espiritual se observan en la concha del caracol, en las yemas de nuestros dedos y en la Vía Láctea.

Figura 11.

Los antiguos mayas le dieron a la cuenta un sentido de plenitud ascendente, es decir, al escribir una cifra, esta únicamente denota que la cuenta está completa y su escritura muestra la verticalidad de la evolución.

Cuando una cuenta se escribe usando la espiral del caracol, se hace como peldaños de una pirámide que apunta hacia la meta cósmica de la vida inteligente, la aspiración del ser que suma cualidades para llegar a la libertad anhelada y la libertad total.

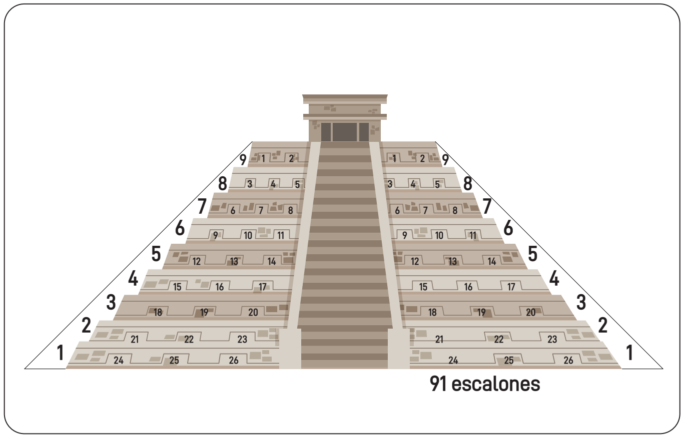


Figura 12.

Interpretación de las formas figurativas matemáticas, de la cultura Náhuatl

El pueblo náhuatl tiene un proceso de aprendizaje desde el inicio de la peregrinación en el año 1111 hasta la fundación de Tenochtitlan en 1325.
El sistema de numeración náhuatl corresponde a la observación, contemplación, visualización y comunicación de un código simbólico figurativo de la actividad humana. Cuatro ideogramas de la dimensión cuadrangular que muestran un orden ascendente de expresión y contenido de un pensamiento superior que, actualmente, aún es visible en las actividades socioculturales de los pueblos del continente y en otras regiones del mundo.

Se mantiene el mensaje al utilizar un dedo o un círculo:

Un dedo: Los dedos, a la vista humana, son los primeros objetos que surgen para contar lo que se observa en la naturaleza y el cielo.
Un círculo: Se mantiene la imagen del Sol corresponde al registro del tiempo que se proyecta en el espacio armónico del cielo, donde el astro siempre conserva un orden en el firmamento, mostrando un *punto* de referencia.

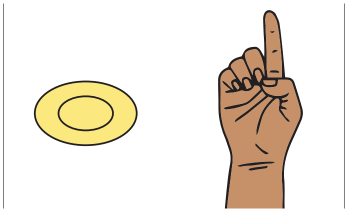


Figura 13.

Modificación del símbolo al formar un cuadrangular vertical con las cuatro barras representativas de las extremidades y el ascenso vertical se hace por el lado izquierdo, donde se encuentra el corazón, donde se concentran las emociones.

Una bandera —símbolo con valor de veinte (cempohualli)—: El cuerpo humano se transforma en una geometría cuadrangular (Girard, 1972) que indica la idea de plenitud y de unidad, mostrando que está conformada por dos fuerzas que se corresponden entre sí: La carne que envuelve la esencia (traducción de la metáfora del número 4 en el idioma náhuatl), y la energía de un cuerpo completo; unidad y plenitud representada en su propia anatomía; La unidad se representa al unir, con líneas imaginarias, las cuatro extremidades del cuerpo físico que, con cinco dedos cada una, da un total de veinte unidades de donde surge el sistema vigesimal.
La plenitud se representa con el mástil que corre verticalmente hacia arriba por el lado izquierdo simbolizando la energía sutil (León, 1979; López, 2008,). En náhuatl, cempohualli, la cuenta de veinte, significa esencia del origen de una cuenta de plenitud. La bandera cuadrangular vertical, es utilizada por los pueblos indios del continente y horizontales por las naciones del mundo.

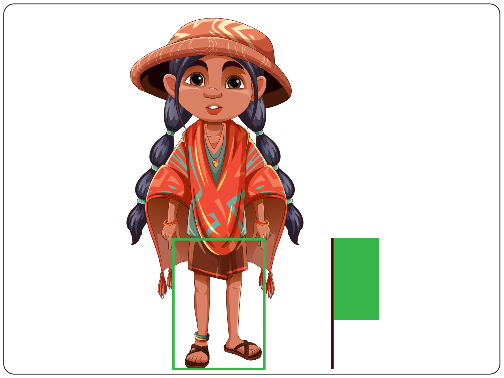


Figura 14.

Modificación del símbolo al utilizar una pluma

Una pluma —símbolo con valor de cuatrocientos (cenzontli)—: En el recorrido matemático ascendente, surge potencialmente el símbolo del 400 (20x20) como número de una cuenta sutil incalculable (Clavijero, 1974). Una pluma de águila se relaciona con la energía solar ascendente (Caso, 2000,) que simboliza la escala de valores humanos representativa de la esencia interior ordenada del individuo (López, 2008). La pluma sigue representando jerarquía entre los pueblos indios del continente; la pluma de águila en Norteamérica, de quetzal en Centroamérica y la del cóndor en América del Sur.

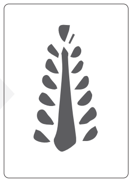


Figura 15.

Modificación del símbolo

Una bolsa o talega —símbolo con valor de ocho mil (ce xiquipilli)—: El modelo matemático figurativo ascendente termina de formarse con el cuarto símbolo del 8000 (400x20) con una bolsa o talega con una cruz al centro, símbolo de unión, donde se transporta las semillas de maíz, cacao y el copal como incienso para las ceremonias rituales (Chapman, 2006). La bolsa o talega donde el campesino también lleva semillas para cultivar el alimento que nos proporciona la madre tierra en comunión con la energía solar y el líquido divino de la lluvia. También se refiere a la bolsa testicular donde el hombre guarda la semilla preciosa (semen), que en el acto supremo del amor deposita en la mujer para concebir hijos y crear nuestra institución más importante, *una familia.* En náhuatl ce *xiquipilli se refiere a un pequeño* cesto o *canasto* cuyo entramado representa el cruzamiento del origen del orden universal.

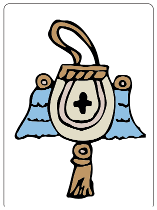


Figura 16.

Usos culturales

Interpretación de la tradición de la Ceremonia de muertos
Para el pueblo náhuatl, la muerte significa la desagregación y la dispersión de los componentes del ser humano, formado por la materia del cuerpo y, además, contiene varias entidades anímicas invisibles y ligeras que le dan individualidad facultades sensoriales de movilidad, sentimientos y capacidad intelectual que lo vincula con su protector espiritual.
Sus entidades anímicas son:

***Teyolia*:** La esencia humana del corazón, la conducta vertical que siguió en vida la más importante de sus facultades mentales; al morir esta energía viaja a un lugar destinado a los muertos.
Tonalli: Unido a la individualidad y al destino personal, reposa sobre la tierra tras la muerte y, generalmente, es guardado por la familia del difunto en una caja que contiene sus cenizas y dos mechones de cabellos.
A los seres humanos del quinto Sol (*nahui ollin*) se les llaman *macehualtin*, es decir, los que fuimos "merecidos", porque nacimos de la muerte, ofrenda y evolución de las cuatro anteriores eras de la evolución. Así, la ofrenda en la ceremonia de muertos corresponde a los seres humanos que "ofrendaron" su vida a la evolución del humano y el maíz.

Símbolos matemáticos en la ofrenda de muertos:
El petate (como representación de la cuenta 8000): Se utiliza en la ofrenda para colocar los elementos rituales.

El copal (transportado en una bolsa o talega símbolo representativo del 8000): Como incienso para la ceremonia ritual de muertos. A través del copal se realiza el rito de unión o conexión del ser humano con lo divino, lo que humea se purifica, recibe una bendición.
***Cempoaxochitl* (20)**: Flor de una cuenta completa; flor que acompaña la materia cuando el espíritu trasciende.
Maíz y frutos: Cosechados después de la cuenta ceremonial de 260 días que concluyó el 29 de octubre anterior.

Figura 17.

Construcción del lenguaje matemático en el idioma náhuatl

Para entender y comprender la cosmovisión náhuatl, es menester internarnos en el mundo de su lengua, ya que el idioma es la llave para adentrarnos en la inmensidad de su filosofía. Es una lengua que fue perfeccionada para alcanzar un refinamiento espiritual donde el pensamiento de orden matemático es de unión colectiva que no admite el individualismo, que ha sobrevivido a pesar del colonialismo impuesto, de muerte y humillación a nuestros pueblos originarios, donde diariamente es hablado por millones de personas en el mundo a través de palabras que subsisten cotidianamente, por ejemplo: noche y día, frío y caliente, hombre y mujer.

El idioma náhuatl es dual, compuesto de significados opuestos que se asocian y cuya realidad oculta es la metáfora.

La unión del todo que es el Universo, se dimensiona en un ***cuadrangular***, por lo cual, la numeración náhuatl elige los cuatro primeros números para simbolizar el principio del orden.

Tabla 1. Medida dimensional cuadrangular

Número	Náhualt	Significado en náhualt
4	Nahui	Carne que envuelve la esencia
3	Yei	Líquido sagrado que une
2	Ome	Esencia de la dualidad o el equilibrio
1	Ce	Esencia de la semilla del origen

Tabla 2. Cuentas y subcuentas

Número	Tipo de cuenta	En lengua Náhualt	Significado en náhualt
8000	Cuenta de unidad completa o unidad fundamental	Ce Xiquipilli	Un pequeño canasto
400	Cuenta de unidad completa o unidad fundamental	Ce Zontli	Un cabello
20	Cuenta de unidad completa o unidad fundamental	Ce Pohualli	Una cuenta de unidad completa
15	Sub cuenta o subunidad	Caxtolli	La cuenta de dos manos y un pie; se refiere queestá arqueada o floja
10	Sub cuenta o subunidad	Mactlactli	La cuenta de dos manos juntas, la mitad de la cuenta de 20
5	Sub cuenta o subunidad	Macuilli	Una mano, idea de cerrar o sujetar con un puño
1	Cuenta de unidad completa o unidad fundamental	Ce	Semilla del origen inicio del orden vertical

El vocablo ***CE*** se define como código de cuenta dimensional de plenitud o donde se encuentra contenido un todo dimensional.

Primer nivel del *Nepohualtzitzin*, del No. 1 al 19

Se utiliza el vocablo *chic,* que se traduce "en verdad", indicando que se utilizan dos manos: una con valor de 5 (subcuenta o sub unidad) y otra donde se van adicionando cada uno de los dedos de la otra mano.

Tabla 3. Construcción de unión progresiva de los números (CUP) 6 al 10

Número	Náhuatl	Sub cuenta 5	Vocablo de unión	Código de medida dimensional cuadrangular	Aritmética en Nepohualtzitzin
10	Mactlactli	Sub unidad			5+5
9	Chicnahui	Chic	uan	Nahui	5+4
8	Chicuey	Chic	uan	Yei	5+3
7	Chicome	Chic	uan	Ome	5+2
6	Chicuace	Chic	uan	Ce	5+1

Tabla 4. Construcción de unión progresiva de los números (CUP) 11 al 15

Número	Náhuatl	Sub cuenta 10	Vocablo de unión	Código de medida dimensional cuadrangular	Aritmética en Nepohualtzitzin
15	Caxtolli				5+5+5
14	Mactlactli uan nahui	Mactlactli	uan	Nahui	5+5+4
13	Mactlactli uan yei	Mactlactli	uan	Yei	5+5+3
12	Mactlactli uan ome	Mactlactli	uan	Ome	5+5+2
11	Mactlactli uan ce	Mactlactli	uan	Ce	5+5+1

Tabla 5. Construcción de unión progresiva de los números (CUP) 16 al 20

Número	Náhuatl	Sub cuenta 10	Vocablo de unión	Código de medida dimensional cuadrangular	Aritmética en Nepohualtzitzin
20	Ce pohualli	Cuenta de unidad completa			5+5+5+5
19	Caxtolli uan nahui	Caxtolli	uan	Nahui	5+5+5+4
18	Caxtolli uan yei	Caxtolli	uan	Yei	5+5+5+3
17	Caxtolli uan ome	Caxtolli	uan	Ome	5+5+5+2
16	Caxtolli uan ce	Caxtolli	uan	Ce	5+5+5+1

Segundo nivel del *Nepohualtzitzin*, del No. 20 al 399

Tabla 6. Construcción de Unión Progresiva (CUP) de los números 21 al 30

Número	Sub cuenta 20	Vocablo de unión	CUP del 6 al 10 tabla N.3	Código de medida dimensional cuadrangular	Aritmética en Nepohualtzitzin
30	Ce pohualli	uan	Mactlactli		20+5+5
29	Ce pohualli	uan	Chic nahui		20+5+4
28	Ce pohualli	uan	Chicuey		20+5+3
27	Ce pohualli	uan	Chic ome		20+5+2
26	Ce pohualli	uan	Chicua Ce		20+5+1
25	Ce pohualli	uan	Macuilli		20+5
24	Ce pohualli	uan	Nahui		20+4
23	Ce pohualli	uan	Yei		20+3
22	Ce pohualli	uan	Ome		20+2
21	Ce pohualli	uan	Ce		20+1

Número	Una cuenta 20	Vocablo de unión	CUP del 11 al 19 tabla N.4 y 5	Código de medida dimensional cuadrangular	Aritmética en Nepohualtzitzin
39	Ce pohualli	uan	Caxtolli	uan nahui	20+5+5+5+4
38	Ce pohualli	uan	Caxtolli	uan yei	20+5+5+5+3
37	Ce pohualli	uan	Caxtolli	uan ome	20+5+5+5+2
36	Ce pohualli	uan	Caxtolli	uan ce	20+5+5+5+1
35	Ce pohualli	uan	Caxtolli		20+5+5+5
34	Ce pohualli	uan	Mactlactli	uan nahui	20+5+5+4
33	Ce pohualli	uan	Mactlactli	uan yei	20+5+5+3
32	Ce pohualli	uan	Mactlactli	uan ome	20+5+5+2
31	Ce pohualli	uan	Mactlactli	uan ce	20+5+5+1

Tabla 7. Construcción de Unión Progresiva (CUP) de los números 31 al 39

Número	CUP del 2 al 19 tabla de 1 al 15	Vocablo de unir números de veces	Una cuenta completa de 20	Aritmética en Nepohualtzitzin	Definición Conceptual
380	Caxtolli uan nahui	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+5(20)+4(20)	19(20)
360	Caxtolli uan yei	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+5(20)+3(20)	18(20)
340	Caxtolli uan ome	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+5(20)+2(20)	17(20)
320	Caxtolli uan ce	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+5(20)+1(20)	16(20)
300	Castolli	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+5(20)	15(20)
280	Mactlactli uan nahui	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+4(20)	14(20)
260	Mactlactli uan yei	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+3(20)	13(20)
240	Mactlactli uan ome	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+2(20)	12(20)
220	Mactlactli uan ce	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)+1(20)	11(20)
200	Mactlactli	ipa	Ce pohualli	5(20)+5(20)	10(20)
180	Chinahui	ipa	Ce pohualli	5(20)+4(20)	9(20)
160	Chicuey	ipa	Ce pohualli	5(20)+3(20)	8(20)
140	Chicome	ipa	Ce pohualli	5(20)+1(20)	7(20)
120	Chicuace	ipa	Ce pohualli	5(20)+1(20)	7(20)
100	Maculli	ipa	Ce pohualli	5(20)	
80	Nahui	ipa	Ce pohualli	20+20+20+20	
60	Yei	ipa	Ce pohualli	20+20+20	
40	Ome	ipa	Ce pohualli	20+20	

Tabla 8. Construcción de Unión Progresiva (CUP) de los números 40 al 380

Tercer nivel del *Nepohualtzitzin*, del No. 400 al 7999

Tabla 9. Construcción de unión progresiva de los números (CUP) 800 al 7600

Número	CUP del 2 al 19 tabla N. del 1 al 5	Vocablo de unir números de veces	Una cuenta completa de 20	Aritmética en Nepohualtzitzin	Definición Conceptual
7,600	Caxtolli uan nahui	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+5(400)+4(400)	19(400)
7,200	Caxtolli uan yei	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+5(400)+3(400)	18(400)
6,800	Caxtolli uan ome	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+5(400)+2(400)	17(400)
6,400	Caxtolli uan ce	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+5(400)+1(400)	16(400)
6,000	Castolli	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+5(400)	15(400)
5,600	Mactlactli uan nahuii	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+4(400)	14(400)
5,200	Mactlactli uan yei	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+3(400)	13(400)
4,800	Mactlactli uan ome	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+2(400)	12(400)
4,400	Mactlactli uan ce	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)+1(400)	11(400)
4000	Mactlactli	ipa	Ce zontli	5(400)+5(400)	10(400)
3,600	Chinahui	ipa	Ce zontli	5(400)+4(400)	9(400)
3,200	Chicuey	ipa	Ce zontli	5(400)+3(400)	8(400)
2,800	Chicome	ipa	Ce zontli	5(400)+2(400)	7(400)
2,400	Chicuace	ipa	Ce zontli	5(400)+1(400)	6(400)
2,000	Maculli	ipa	Ce zontli	5(400)	
1,600	Nahui	ipa	Ce zontli	4(400)	
1,200	Yei	ipa	Ce zontli	3(400)	
800	Ome	ipa	Ce zontli	2(400)	

El modelo figurativo de la cuenta de plenitud dimensional

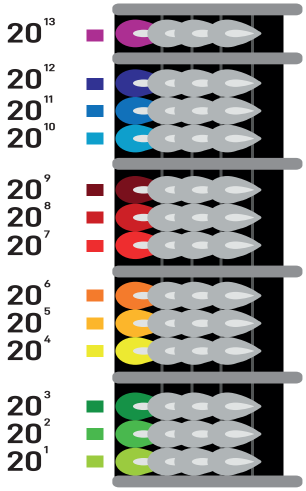


Figura 18.

Expresión numérica en el idioma Náhuatl

Número	Expresión Ptencial	Vocablo Náhuatl	Definición conceptual	Expresión Numérica
13	20^{12}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce xiquipilli	(8,000)(8,000)(8,000)(8,000)	4,096,000,000,000,000
12	20^{11}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce zontli	(8,000)(8,000)(8,000)(400)	204,800,000,000,000
11	20^{10}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce pohualli	(8,000)(8,000)(8,000)(20)	10,240,000,000,000
10	20^{9}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce xiquipilli	(8,000)(8,000)(8,000)	512,000,000,000
9	20^{8}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce zontli	(8,000)(8,000)(400)	25,600,000,000
8	20^{7}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli ipa ce pohualli	(8,000)(8,000)(20)	1,280,000,000
7	20^{6}	Ce xiquipilli ipa ce xiquipilli	(8,000)(8,000)	64,000,000
6	20^{5}	Ce xiquipilli ipa ce zontli	(8,000)(400)	3,200,000
5	20^{4}	Ce xiquipilli ipa ce pohualli	(8,000)(20)	160,000
4	20^{3}	Ce xiquipilli	(400)(20)	8,000
3	20^{2}	Ce zontli	(20)(20)	400
2	20^{1}	Ce pohualli		20
1	20^{0}			

Expresión numérica potencial en el modelo figurativo

Expresión numérica en el idioma Náhuatl

Nivel	Imágen	Expresión potencial	Modelo figurativo	
7		20^6		(8,000)(8,000)
6		20^5		(8,000)(400)
5		20^4		(8,000)(20)
4		20^3		(400)(20)
3		20^2		(20)(20)
2		20^1		(20)(20)
1		20^0		

Figura 19.

Expresión numérica en el idioma Náhuatl

Nivel	Imágen	Expresión potencial	Modelo figurativo	
13		20^{12}		(8,000)(8,000) (8,000)(8,000)
12		20^{11}		(8,000)(8,000) (8,000)(400)
11		20^{10}		(8,000)(8,000) (8,000)(20)
10		20^9		(8,000)(8,000) (8,000)
9		20^8		(8,000)(8,000) (400)
8		20^7		(8,000)(8,000) (20)

Figura 20.

Conclusiones acerca del uso del Nepohualtzitzin como recurso didáctico para el desarrollo de las competencias matemáticas en el sistema educativo nacional

A continuación, muestro algunos aprendizajes y observaciones obtenidos sobre la tradición histórica de las ciencias matemáticas mesoamericanas en educación básica, son los siguientes:

Su uso mejora la autoestima del niño, al reconocerse heredero de las ciencias matemáticas mesoamericana, al permitirle tener una mayor comprensión de las matemáticas y obtener mejores resultados en esta materia.

Debido a que el Nepohualtzitzin tiene dos premisas: como instrumento de las matemáticas mesoamericanas: la de un modelo formal matemático de representaciones numéricas cuantitativas y representaciones numéricas sutiles, y su complemento, donde se encuentra la estructura del pensamiento filosófico a través de las representaciones figurativas, resulta para el alumno más comprensible entender el mensaje del orden total, es decir, el aspecto holístico de la cosmovisión mesoamericana.

Los alumnos que lo utilizan manifiestan que “sufren” menos las matemáticas y la mayoría de ellos expresan satisfacción al emplearlo. Mejora el ambiente escolar y el trabajo en equipo. Incluso, algunos docentes que lo han implementado, expresan que las manifestaciones de “Bulling” han descendido en sus aulas, por parte de alumnos/as que se comportaban de manera violenta.

Se logran cada vez mejores resultados en la medida en que los maestros se “atreven” a utilizarlo de manera sistemática con sus alumnos. Algunos docentes manifiestan que es difícil para ellos seguir el paso acelerado de los niños en el uso del Nepohualtzitzin.

Los alumnos encuentran de manera más fácil diferentes caminos y métodos para solucionar los problemas matemáticos que deben resolver. Esto requiere que los docentes asuman una función menos directiva y más facilitadora del aprendizaje autónomo de sus alumnos.

Se logran excelentes resultados cuando todos los miembros de la comunidad escolar están convencidos de su utilidad y se involucran decididamente en su uso. (alumnos, padres de familia maestros y autoridades educativas).

Al analizar, razonar e interpretar la similitud y evolución en conceptos, creencias y usos científico-humanistas dentro de las sociedades de tres de las culturas más importantes en Mesoamérica, incluso con una importante diferencia respecto a su época de florecimiento, lo que no nos habla más que de un orden y una importancia social que trascendió, mostró un proceso de evolución del mensaje hasta el momento del accidente histórico donde inició la colonia y que merece la pena tomar en cuenta; actualmente, sólo en temas educativos, sin mencionar temas sociales y culturales, encontramos bastante negación hacía esta materia, anteriormente pilar de las civilizaciones mencionadas, lo que nos habla de una necesidad inherente, culturalmente hablando, de su asimilación, para mejorar la sociedad actual en los territorios abarcados por dichas civilizaciones e, incluso, es un modelo válido y aplicable a cualquier región para mejorar el desempeño socio-cultural de las mismas.

Referencias

Cantoral, R. (2002). ***Matemática educativa: Una visión de su evolución***. ***Revista del IPN.*** (44), 26-34.

Carpanta, L. (2008). ***Lecciones y ejercicios del idioma asteka.*** Edición particular.

Caso, A. (2000). ***El pueblo del Sol***. Fondo de Cultura Económica.

Chapman, A. (2006). ***Los hijos del copal y de la candela.*** (Vol. 2). UNAM.

Clavijero, F. (1974). ***Reglas de la lengua mexicana con un vocabulario.*** UNAM.

Girard, R. (1972). ***Esoterismo en el Popol Vuh***. Editores mexicanos unidos S.A.

Lara, E. (2013). ***Nepohualtzitzin, en el modelo matemático figurativo náhuatl***. ACUDE. CONACULTA.

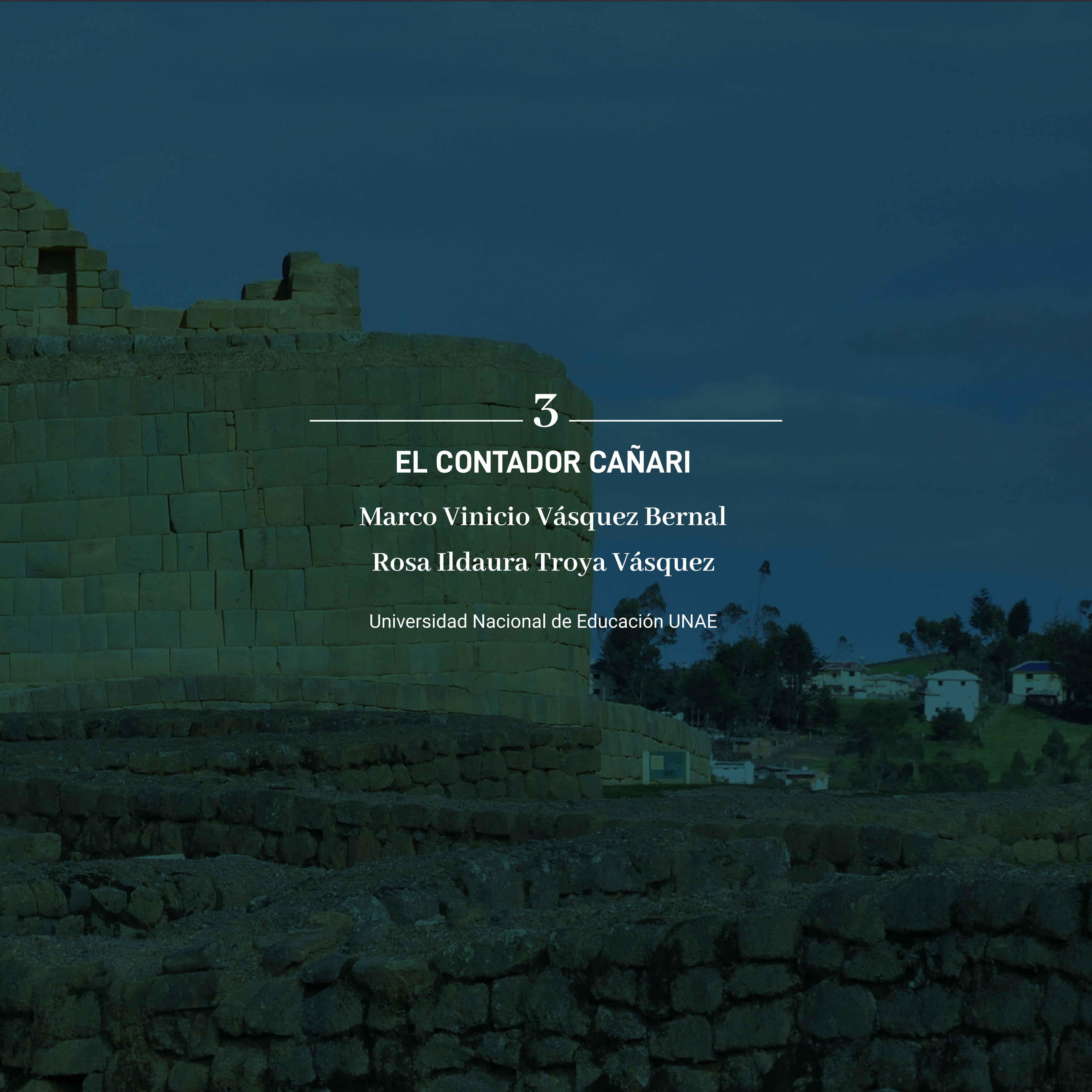
Lara, E. y Flores, A. (2009). Manual didáctico del Nepohualtzitzin para el desarrollo de las competencias matemáticas. ***CGEIB-SEP***.

León, M. (1979). ***La Filosofía Nahuatl***. UNAM.

López, A. (2008). ***Cuerpo humano e ideología. Las concepciones de los antiguos nahuas***. (Vol. 2). UNAM.

López, A. (2017). La cosmovisión de la tradición mesoamericana. ***Revista Arqueología mexicana***. (68).

Romero, I. (1964). ***Moctezuma El Magnífico.*** Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística.



3

EL CONTADOR CAÑARI

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Rosa Ildaura Troya Vásquez

Universidad Nacional de Educación UNAE

Introducción

Autores como Gheverghese (1996), indican que las Matemáticas pueden entenderse como un conjunto de conceptos creados por el ser humano ante los requerimientos de su entorno. En tal sentido, surgieron en distintas geografías como respuesta a las particularidades y realidades naturales y culturales de su entorno. El área septentrional de Ecuador no fue la excepción, en esta zona se desarrolló la gran nación Cañari, pueblo que ha legado significativas construcciones y conocimientos. Iglesias (1964) presenta fundamentadamente avances de esta cultura que evidencian su desarrollo como: el manejo de un calendario, sus técnicas de alfarería y orfebrería, sus tejidos, su música, su danza, el hecho que tenían un lenguaje propio, sus grandes construcciones, entre otros. Cabe entonces preguntarse ¿Qué conceptos de cantidad y de razones utilizaban para lograr esos resultados?

Sin lugar a dudas, la respuesta a esta interrogante establecerá el hecho de que el pueblo cañari debió manejar conceptos que hoy se les llamaría matemáticos, mismos que, les sirvieron para elaborar sus objetos, construir sus vías y edificaciones, entender el paso del tiempo y comunicarse con sus semejantes. Las normas y principios con los que este pueblo se regía corresponden a la cosmovisión andina, caracterizada por la integralidad y la coexistencia equilibrada de los elementos.

De hecho, existen conceptos de cantidad y de relaciones que en la leyenda de la Guacamaya narra un origen mítico de este pueblo. Es más, algunos arqueólogos han encontrado objetos que permiten realizar cálculos matemáticos según lo demostrado.
Sin embargo, autores que han investigado a profundidad sobre la historia de los Cañaris como Arriaga y Reinoso hablan de un objeto, al cual Arriaga (1922) denomina Contador Cañari, de este objeto el investigador afirma:

> *Rvmo. Sor. Canónigo D. Isaac M. Peña consiguió en el pueblo del Sigsig una piedra curiosa, con ciertas líneas dibujadas en cuadros, que algo debían significar. Ofreció la al Ilmo. Sor. Pólit, quien nos la mostró. Como era natural, buscamos qué pudieran significar aquellos dibujos, y hallada una solución, tuvimos el contento de presentarla al Ilmo. Prelado. Como el descubrimiento revestía un carácter de utilidad para el pueblo, lo hicimos público en el semanario "Alianza Obrera". Del campo de la práctica hemos pasado al de la investigación arqueológica; los resultados que aparecen, por pequeños que sean, vamos a consignarlos en este artículo, una vez que hemos consagrado el presente opúsculo a esta clase de investigaciones.*
> *Decimos que la piedra de que se trata es un contador fin que sus dibujantes se propusieron, dimos con que servía perfectamente bien para sumar y restar, según el sistema decimal. Todos los dibujos son hechos para este objeto exclusivo, y no parece sirvieran para ningún otro porque, al buscar el uso. (p. 61)*

Han sido varios los objetos de esta forma encontrados y elaborados ya sea en piedra o en madera. El hecho hace suponer que su uso era común entre el pueblo Cañari.

Descripción y Análisis

La forma de este objeto es bastante simple: un espacio grande en la parte superior, dos grupos de nueve espacios en la parte inferior, cada uno forma un cuadrado de 3 x 3 espacios. Además, en algunos de ellos existen dos filas de cinco espacios cada una, alineadas con los grupos de cuadrados.

Por las cavidades talladas, es evidente que estos espacios servían para representar algo al ubicar y quitar otros objetos que debían caber en estos. Esa representación debía ser en la parte inferior del objeto donde los espacios son más precisos, la parte superior por su tamaño debía ser para ubicar, seleccionar y ordenar los objetos ubicados en los espacios inferiores

.

Piedra tallada encontrada en Sigsig por el reverendo Isaac M. Peña, apuntes tomada del libro Apuntes de Arqueología Cañar de Jesús Arriaga.

Tablero de taptana o contador, fotografía tomada de "El Tesoro Precolombino de Sígsig". Dr. Benigno Malo Vega publicado en el 2015.

Al analizar estos objetos, cabe resaltar lo afirmado por Arriaga (1922) cuando indica que, este objeto permite realizar operaciones aritméticas. Esta afirmación como resultado de una reflexión profunda sobre estos objetos tiene en cuenta los procesos de abstracción que demandan las operaciones matemáticas. A diferencia con otros objetos como los quipus que permitían la representación y guardado de cantidades, este objeto permitía hacer operaciones con esas cantidades.

Sobre los objetos complementarios que servirían para usar el objeto principal y que permitirían la realización de las operaciones, está claro que debían ser accesibles, de fácil transportación y clasificables. Debido a lo cual, se piensa en granos o piedras pequeñas que quepan y puedan ser fácilmente identificables cuando estén sobre el objeto principal.

Consecuentemente, el "operar" en este objeto debía realizarse únicamente moviendo y ubicando esos objetos complementarios. De tal manera que, las distintas ubicaciones indiquen distintas cantidades sin ambigüedad alguna.

Al mover, ordenar y ubicar esos objetos complementarios existe una actividad netamente de juego, hecho que seguro llevó a que algunos investigadores propongan este objeto como un objeto lúdico. Sin embargo, la precisión sobre el uso de los espacios inferiores evidencia una formalidad que obliga a reconocer el contenido científico que está presente en este objeto, lo que, seguramente fue utilizado para fines más serios que el juego.

Análisis como los presentados aquí motivaron que Jesús Arriaga proponga la denominación de "Contador Cañari" en función de su utilidad práctica y del vasto conocimiento que permitió su construcción. Es decir, con la finalidad de valorar la procedencia intelectual de este objeto, misma que debe reconocerse como el resultado científico de un proceso de desarrollo del conocimiento.

Contador Cañari hecho en madera, encontrado por Collier en el sector de Sigsig (1922).

Contador Cañari, presentado por Gustavo Reinoso, hecho en roca arenisca en su libro Cañaris e Incas (2006).

Desarrollo Matemático

En general, los conceptos matemáticos han surgido y surgen en respuesta a las necesidades del ser humano por entender su entorno. En tal sentido, cada concepto aparece de una necesidad real y el ser humano con los recursos de su entorno propone respuestas que le ayudan a superar sus necesidades y avanzar a nuevas realidades.

El ser humano al enfrentarse a sus primeras necesidades como la manera de diferenciar las cantidades, ya sea para distribuir alimentos o para entender el paso del tiempo y sus etapas, debió idear el conteo. Quizá la primera propuesta se centró en representar las cantidades una a una con elementos simples. Es decir, por un día un grano de maíz, por dos días dos granos de maíz y así sucesivamente, estableciendo un modelo con elemento tangibles.

Este modelo práctico posiblemente presentó problemas para representar una gran cantidad de elementos que requerían gran cantidad de elementos simples. Por consiguiente, surgiría la idea de una clasificación de esos elementos simples con una equivalencia en función del tipo, color o tamaño. Así, un grano de poroto podía representar cincuenta de maíz, concepto que ayudaría mucho en la representación.

En este proceso el ser humano tenía a su alcance unos elementos útiles como son sus extremidades y particularmente sus dedos. Elementos que permitían procesos de conteo, aunque no posibilitaban el guardar información como lo hacen los otros elementos simples mencionados.

A la par que surgía la necesidad de conteo surgirían también las necesidades de relacionar, juntar y separar cantidades en estos modelos de elementos concretos simples. Por tanto, debió ser desafiante para los pueblos originarios porque, demandaba un apego absoluto a lo concreto con procesos sustentados absolutamente en los sentidos humanos.
Posteriormente, los procesos simbólicos surgen en la última etapa de este proceso, donde l a escritura sistematiza todo y muestra un resultado con mucha historia.

La Numeración Cañari

Según Vásquez (1996) el pueblo cañari, fiel a su cosmovisión holística y vivencial desarrolló su comunicación desde la continuidad de la oralidad con simbología concreta y viva. Desarrollaron su propia lengua que se perdió luego de la conquista. El lenguaje propio de los cañaris tenía mucha similitud con el puruhá y con otros de pueblos vecinos, pues compartían ciertos aspectos característicos de la cosmovisión andina. En tal sentido, para tener una idea de la concepción de número en el pueblo cañari vale partir de los vocablos que permiten el conteo en quechua o quichua, idioma de los incas que luego fue impuesto en este territorio.

A continuación, algunas reglas de conteo establecidas para el idioma quechua que en sus principios acogen la familia de idiomas que se hablaban en la zona habitada por los cañaris:

1. Las cifras del cero al diez tienen palabras específicas: *ch'usaq* (0), *huk* (1), *iskay* (2), *kimsa* (3), *tawa* (4), *pichqa* (5), *suqta* (6), *qanchis* (7), *pusaq* (8) e *isqun* (9).
2. Las cantidades significativas como cien, mil, millón, mil millones tienen sus vocablos propios: pachak (100), waranqa (1000), hunu (1000000), lluna (1000000000).
3. Las decenas se forman empezando por la cifra multiplicadora, seguida por la palabra para diez (*chunka*) separada por un espacio, *iskay chunka* (20), *kimsa chunka* (30), *tawa chunka* (40), *pichqa chunka* (50), *suqta chunka* (60), *qanchis chunka* (70), *pusaq chunka* (80) e *isqun chunka* (90).
4. Los números compuestos se forman empezando por la decena, y luego la unidad separada por un espacio, con el sufijo *-yuq* (que significa *con*), a veces precedido por la partícula *-ni-*. La partícula *-ni-* es una partícula eufónica intercalada antes de la partícula final *-yuq* para facilitar la pronunciación. Se puede encontrar después de cada número compuesto que no termina en *-a*, ejemplo: *chunka qanchisniyuq* (17), *pichqa chunka pusaqniyuq* (58), o después de una decena compuesta, ejemplo: *pachak iskay chunkayuq* (120).
5. Las centenas se forman empezando por la cifra multiplicadora, seguida por la palabra para cien (*pachak*), separada por un espacio, con la excepción de cien mismo: *pachak* (100), *iskay pachak* (200), *kimsa pachak* (300), *tawa pachak* (400), *pichqa pachak* (500), *suqta pachak* (600), *qanchis pachak* (700), *pusaq pachak* (800) e *isqun pachak* (900).
6. Los miles se forman empezando por la cifra multiplicadora, seguida por la palabra para mil (*waranqa*), separada por un espacio, con la excepción mismo de mil: *waranqa* (1.000), *iskay waranqa* (2.000), *kimsa waranqa* (3.000), *tawa waranqa* (4.000), *pichqa waranqa* (5 000), *suqta waranqa* (6.000), *qanchis waranqa* (7.000), *pusaq waranqa* (8.000) e *isqun waranqa* (9.000).

Resulta evidente que el sistema numérico utilizado es de base diez y que, los vocablos que identifican las cantidades compuestas se construyen yuxtaponiendo vocablos de cantidades simples (potencias de diez), de mayor a menor. Estas características hacen factible el desarrollo de las operaciones aritméticas en el contador cañari.

Operaciones matemáticas en el Contador Cañari

Para empezar, es preciso describir las zonas y las normas que permitan desarrollar las operaciones aritméticas básicas en el Contador Cañari.

Descripción de las Zonas del Contador Cañari

A fin de tener clara la funcionalidad de este objeto es necesario explicitar que el Contador Cañari está compuesto de tres zonas:

- Zona 1. Espacio donde pueden ubicarse los objetos complementarios para clasificarlos o transformarlos en sus equivalentes.

- Zona 2. Espacio donde se representan las cantidades sobre las que se opera o los resultados de estas.

- Zona 3. Espacios utilizados en algunas de las operaciones aritméticas (no está presente en todos los contadores).

Estas zonas son claramente visibles en la figura 1.

Normas para el Uso del Contador Cañari

a. Las casillas de la zona 2 permiten representar cantidades del uno al nueve, tal como muestra la figura 2.
b. El orden ascendente de esas representaciones es espiral, inicia en el extremo inferior que representa el uno y concluye en el espacio del centro que representa el nueve (figura 2).
c. La zona 1 sirve para ubicar, clasificar y transformar los objetos complementarios. Este espacio es transitorio, pues los valores a operar o los resultados obtenidos no toman en cuenta los elementos que aquí se encuentren.
d. Los objetos complementarios deben diferenciarse por alguna característica, de tal forma que cada uno represente. Deben ser accesibles y de fácil manipulación.
e. En este trabajo los elementos complementarios serán figuras de distintos granos, bajo los detalles de la siguiente tabla:

Tabla 2
Elementos complementarios para el empleo del Contador Cañari

Figura de grano	Representa	Figura de grano	Representa
	Unidades		Unidades de mil.
	Decenas		Decenas de mil
	Centenas	……	

Fuente. Elaboración propia

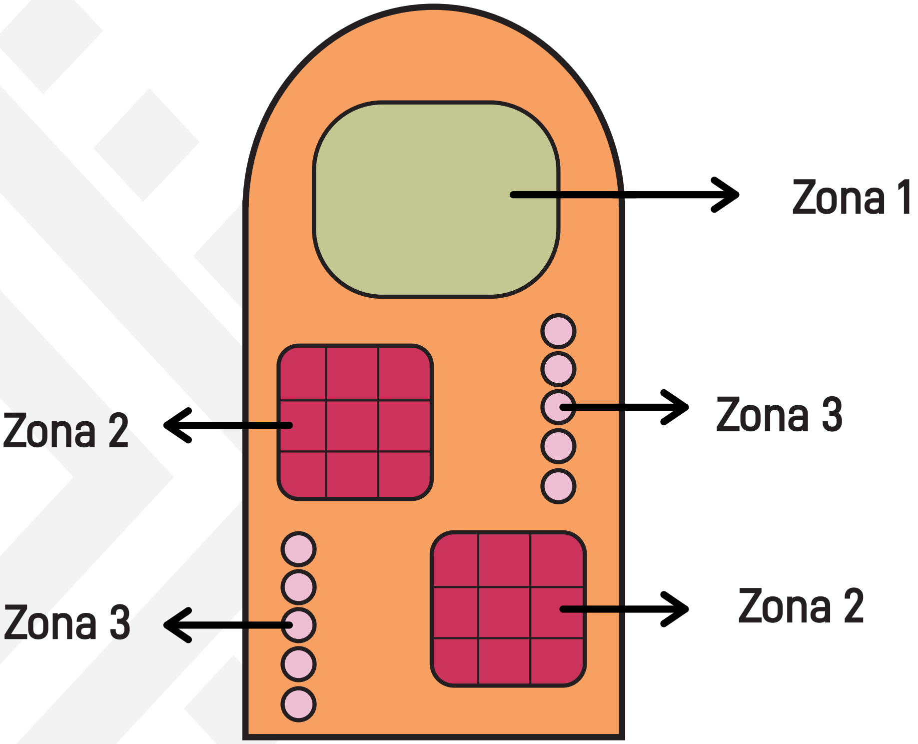


Figura 1. Gráfico del Contador Cañari, con sus zonas.

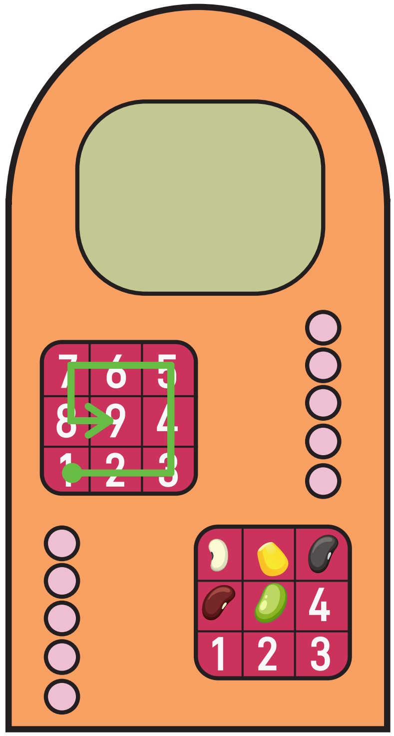


Figura 2. Gráfico del Contador Cañari con las áreas donde se representan las cantidades indicadas.

Operaciones en el Contador Cañari

A continuación, la descripción de las operaciones que se pueden realizar en el Contador Cañari:

Representación de una cantida

a. Lo fundamental para entender el funcionamiento de este objeto es tener claro cómo representar una cantidad en este contador. Para ello, simplemente se tomará en cuenta las cantidades y se representarán en los dos espacios de la zona 2; espacios que funcionan independientemente. Además, hay que recordar que cada uno de esos espacios están divididos en 9 espacios cuadrados pequeñas y cada uno de estos está asociado a una cantidad.

   De la misma manera, hay que considerar que los objetos complementarios a su vez representan cantidades de potencias de diez. Por tanto, estos objetos y su ubicación permiten representar cualquier cantidad. Por ejemplo, representar la cantidad seis mil cuatrocientos veinte y siete, resulta de yuxtaponer seis unidades de mil, cuatro centenas, dos decenas y siete unidades. Su representación en el contador cañari consistiría en: tomar el fréjol rojo que representa unidades de mil, ubicar en el espacio asociado al seis, ubicar el fréjol negro que representa centenas en el espacio asociado al cuatro, ubicar el fréjol blanco que representa decenas en el espacio asociado al dos y el maíz que representa unidades colocar en el espacio asociado al siete (figura 3).

b. Si los objetos complementarios no han sido ubicados para representar una cantidad alguna cantidad es porque, el valor representado no contiene esos elementos y que es posible que en un mismo espacio puedan ubicarse más de objeto complementario. Por ejemplo, si deseamos representar ocho mil ochenta y siete, las representaciones de unidades de mil y decenas serán ubicadas en la celda del ocho y las de unidades ubicadas en la celda del siete (figura 4).

   También, por su construcción, la forma del ciclo y del movimiento este objeto es igual para cada uno de los objetos complementarios, porque el fin de un ciclo genera un avance en el ciclo del objeto que representa el orden inmediatamente superior.

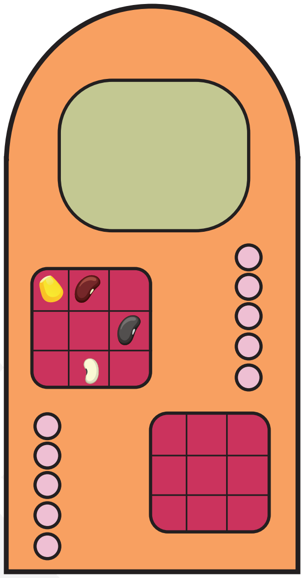


Figura 3. Representación de la cantidad 6.427.

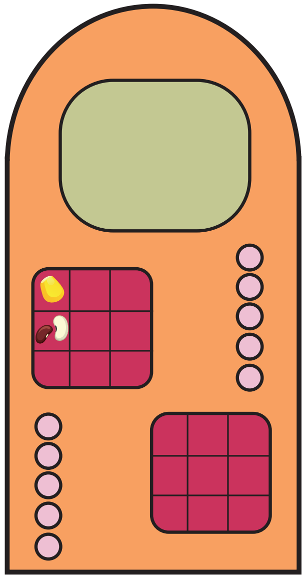
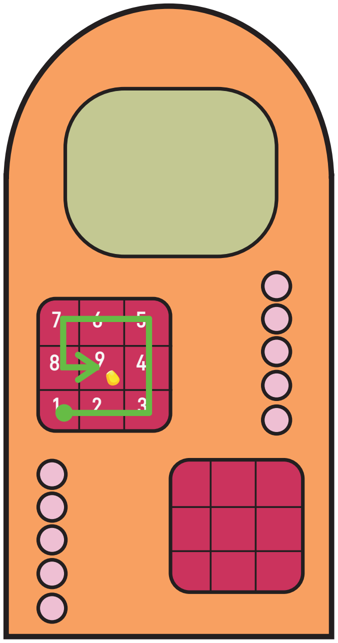


Figura 4. Representación de la cantidad 8.087, no existe representación de centenas y las representaciones de unidades de mil y decenas está en lel espacio del ocho.

c. Esta operación es quizá la más importante, porque en función de esta se pueden entender las demás. Tiene que ver con el proceso dinámico de buscar cantidades que representen un conjunto, es decir una relación de la unidad con un grupo de estos. Inicia en cero y va aumentando una unidad.

d. En el caso del contador cañari, se lo hará en cualquiera de los dos espacios de la zona 2, iniciando en la esquina inferior izquierda y por cada elemento aumentado se debe mover una celda en sentido horario, de afuera hacia adentro, hasta alcanzar el noveno elemento en la celda central. Así se hará el conteo del uno al nueve.

e. Una vez que concluido un ciclo, los diez objetos se deben cambiar por uno de orden mayor, en este caso una decena.Esta transformación se hace en la zona 1, obligando a avanzar en una celda el objeto complementario de orden mayor al que concluyó el ciclo. Es decir, al concluir el ciclo de las unidades se debe avanzar en el de las decenas; al concluir el ciclo de decenas se debe avanzar en el de las centenas; al concluir el ciclo de las centenas se debe avanzar en el de las unidades de mil; al concluir el ciclo de las unidades de mil se debe avanzar en el de las decenas de mil u otras, según el caso, siempre en sentido horario (figuras 5 y 6).



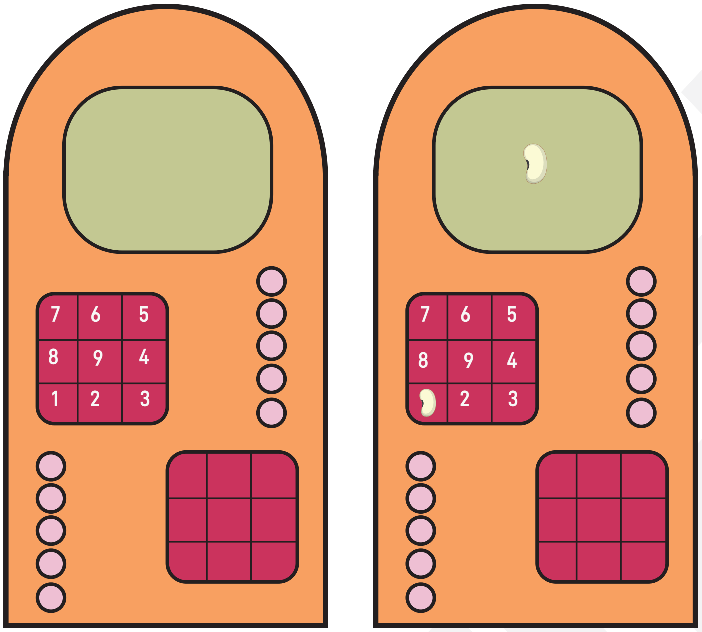


Figura 5. Para el conteo se inicia en la esquina izquierda inferior (1) y, avanzando una celda a la vez, se mueve en forma de espiral, con sentido horario hasta alcanzar la celda del centro (9).

Figura 6. Luego del 9, el siguiente elemento cumple el ciclo por lo que se transforma en un objeto complementario de orden mayor, es decir una decena. Se ubica en la zona 1, obligando un cambio o un movimiento a los objetos de esa orden, en este caso de las decenas que iniciarán en la esquina izquierda inferior, representando el diez.

El proceso del conteo continua con movimientos siempre en sentido horario y en forma espiral el objeto complentario que representa las unidades, generando los cambios de orden tal como se ha indicado.
A fin de entender mejor este poceso, en las figuras 7 y 8 se presentan dos ejemplos del proceso de conteo.

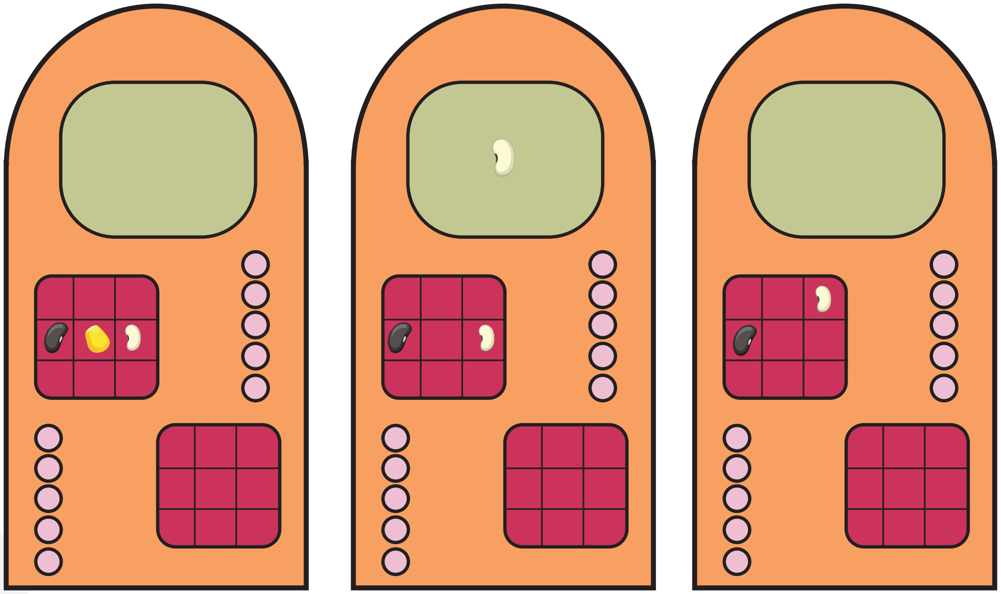


Figura 7. Ejemplo donde se pasa de 849 a 850 en el proceso de conteo, las unidades cumplen su ciclo y pasan a la zona 1 como decena, obligando que los objetos complementarios de orden mayor, las decenas, se muevan en uno y se mueva de cuatro a cinco, resultando 850.

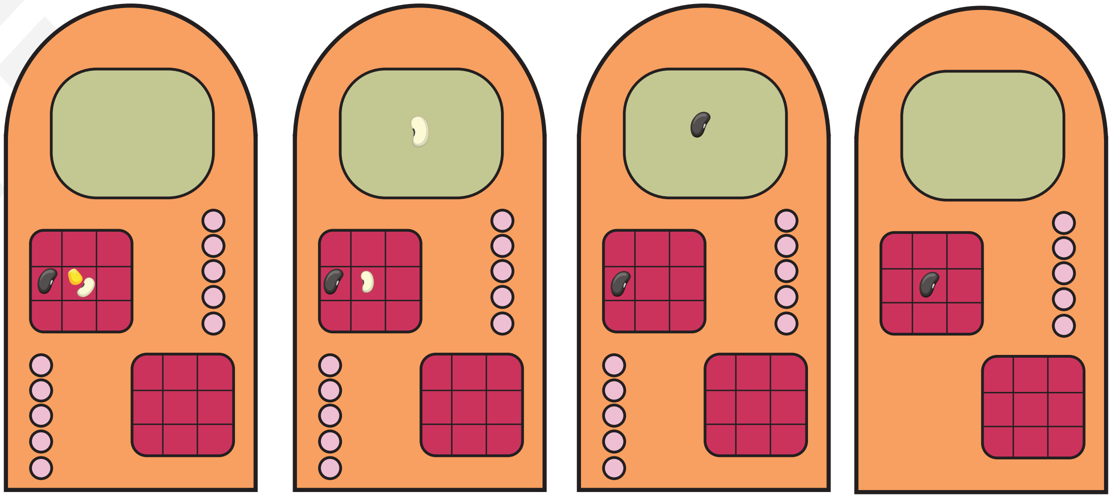


Figura 8. Ejemplo donde se pasa de 899 a 900 en el proceso de conteo, las unidades cumplen su ciclo y pasan a la zona 1 como un objeto complementario de orden mayor, es decir, como una decena, obligando un movimiento de estos objetos, pero las decenas también cumplen su ciclo y pasan a la zona 1 como una centena, puesto que, este es el orden inmediatamente superior, por tanto, las centenas se mueven en uno y se ubican en el espacio del nueve, representando así el 900.

Adición

Una de las acciones básicas entre cantidades es aquella de juntarlas, la cual, tiene que ver justamente con unir o juntar dos grupos de elementos similares y “predecir” la cantidad de elementos que forman este nuevo grupo constituido, a ese proceso se conoce como *adición* o *sumatoria* que, de seguro debió ser un reto al inicio de las Matemáticas.

En el Contador Cañari, el proceso de juntar cantidades es una generalización del proceso de conteo, debido a que debe respetar el valor posicional de cada tipo de objeto complementario y desarrollar el proceso siguiendo las normas ya indicadas.

Con la finalidad de entender el proceso para sumar o juntar dos cantidades en el Contador Cañari, se plantea en este escrito un conjunto de pasos que deben realizarse ordenadamente:

1. Repesentación de las dos cantidades a sumar, una en cada una de las áreas de la zona 2.

2. Uno a uno se toma los objetos complementarios de la cantidad representada en el cuadrado inferior de la zona 2. Transformar en la cantidad de ojetos complementarios que representan según su ubicación y esos objetos ubicar en la zona 1.

3. Por cada uno de los objetos complentarios que se encuentren en la zona 1, se debe mover el respectivo objeto complementario que se encuentra en el cuadrado superior de la zona 2 en una casilla, en sentido horario según el movimiento indicado en el conteo. Si ese objeto complementario no se encuentra en el cuadrado superior, se iniciará el ciclo desde la casilla inferior izquierda. Es posible que en este caso concluya un ciclo, de ser así es necesario hacer los cambios indicados en el conteo.

4. Al finalizar el paso 3 y todos los objetos complementarios de la zona 1 hayan agotado, la cantidad representada en el cuadrado superior de la zona 2 constituyen el resultado de la suma buscada.

Nota: No es necesario sujetarse a ningún orden para la selección de los objetos complementarios del cuadrado inferior de la zona 2 o de los que vayan ubicándose en la zona.

Ejemplo:

Sumar 475 más 356.
Los pasos graficados en las figuras de la 9 a la 17, muestran el proceso para realizar la suma entre las cantidades 475 y 356.

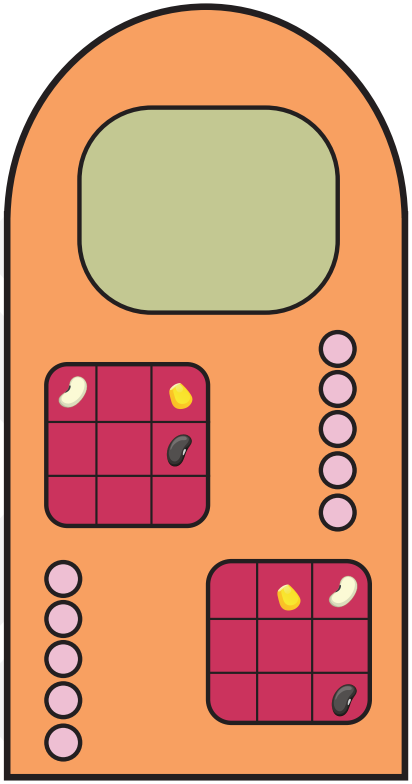


Figura 9. Cumpliendo con lo del paso 1, se realiza la representación de las dos cantidades a sumarse 475 y 356.

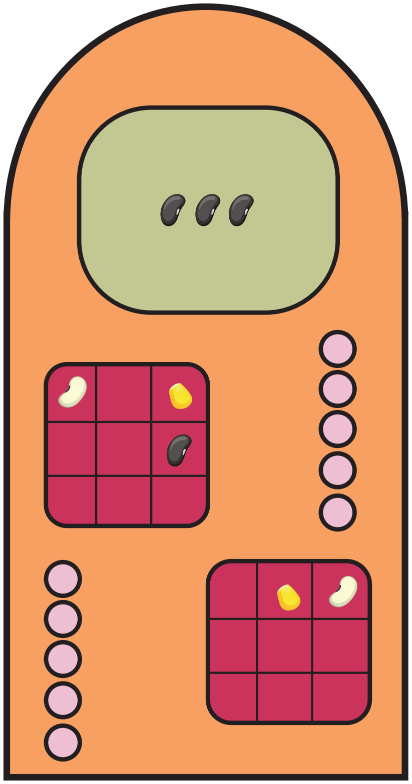


Figura 10. Conforme al paso 2, se toma el objeto complementario que representa las centenas, se lo transforma en tres de esos objetos por cuanto la casilla donde se encuentra representa el número tres y se ubica esos objetos en la zona 1.

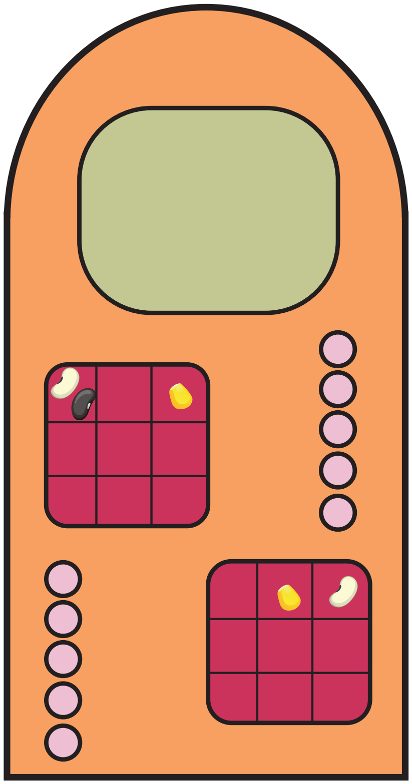


Figura 11. De acuerdo al paso 3, se mueve el respectivo objeto complementario en tres casillas (uno por cada objeto presente en la zona 1), el movimiento se sujeta a lo ya indicado.

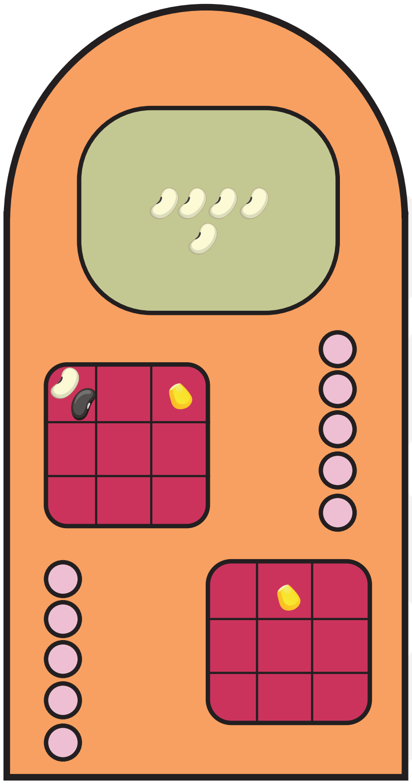


Figura 12. De acuerdo al paso 2, se toma otro objeto complementario del cuadrado inferior y se lo transforma en cinco objetos similares (según la casilla donde se encuentra) y se los ubicamos en la zona 1.

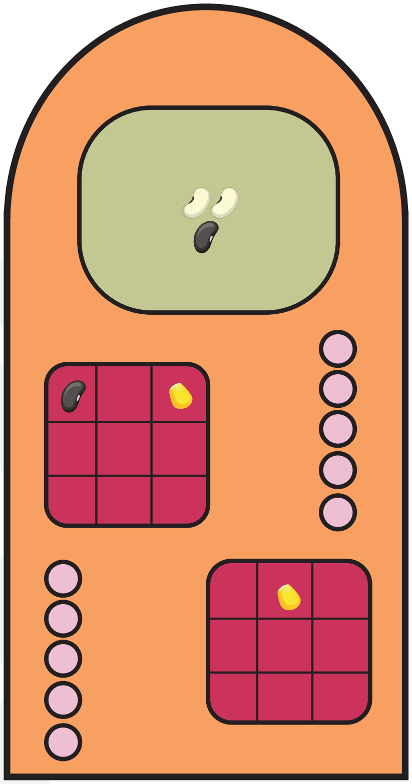


Figura 13. Se debe mover en cinco casillas el objeto complementario que representa las decenas, más al mover tres se cumple un ciclo, entonces se ubica un elemento de orden superior (centenas) en la zona 1.

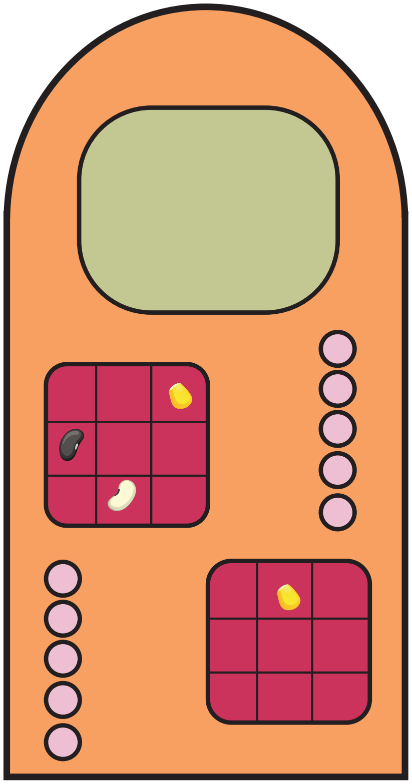


Figura 14. El objeto que representa centenas se moverá en una casilla y los objetos que repesentan decenas inician un nuevo ciclo, como hay dos llegará a la casilla del dos.

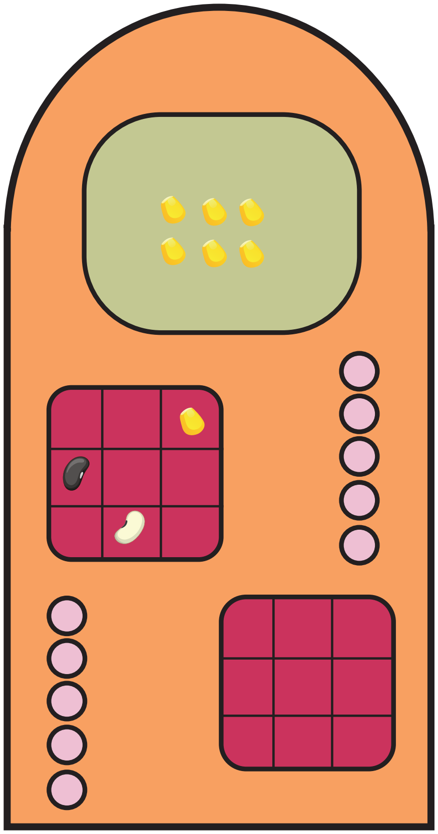


Figura 15. Se toma del cuadrado inferior, el objeto complementario que representa unidades, se transforma en seis objetos de esos y se ubica en la zona 1.

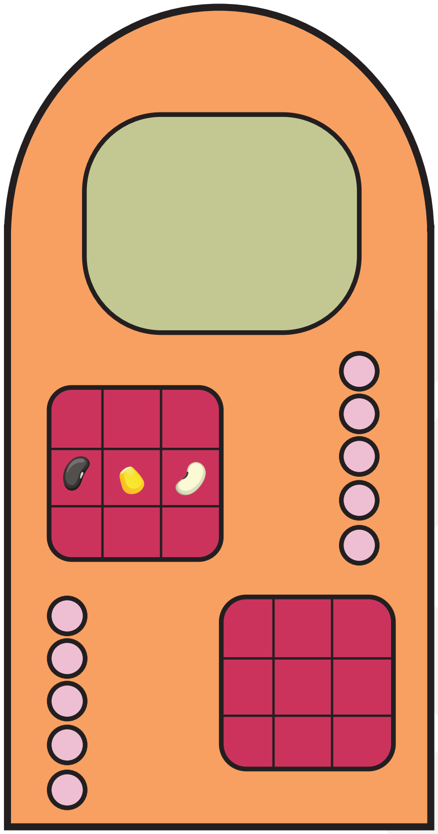


Figura 16. Por la ubicación del objeto que representa unidades en el cuadrado superior, se observa que son necesarios cinco objetos de estos para completar un ciclo, en tal sentido, se transforman cinco de estos en uno que representa una decena.

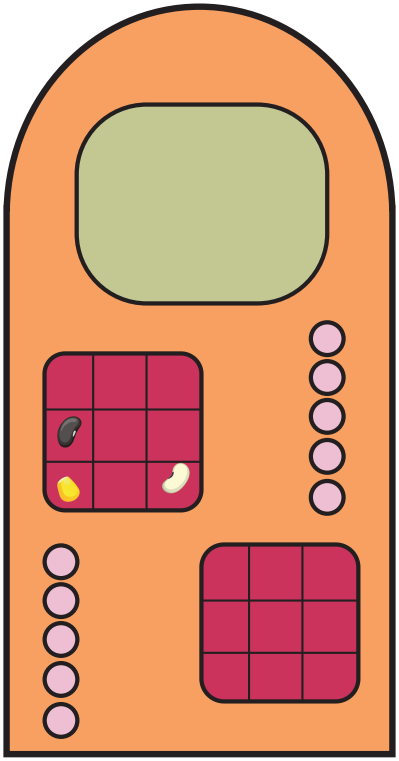


Figura 17. Por la ubicación del objeto que representa unidades en el cuadrado superior, se observa que son necesarios cinco objetos de estos para completar un ciclo, en tal sentido, se transforman cinco de estos en uno que representa una decena.

En la última figura, ya no existen objetos complementarios en el cuadrado inferior de la zona 2 ni en la zona 1, por lo que, la operación ha concluido y la cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado.
En este caso, en el cuadrado de la última de esas figuras está representada la cantidad 831 que justamente es el resultado de esa

suma.

Sustracción

Otra operación matemática básica es la sustracción o resta. Vista como operación que funciona de manera opuesta a la sumatoria. Es decir, en lugar de juntar se deberá quitar, retirar o separar una cantidad. Esta operación busca predecir que cantidad resulta si a una cantidad dada le quitamos una parte de los objetos que estaban allí.

El proceso a seguir en el Contador Cañari será realizar los movimientos de los objetos complementarios en sentido contrario al de la suma, es decir, en sentido antihorario. Además, en este caso los movimientos son de regreso dentro del ciclo o a ciclos anteriores, siempre en el proceso de conteo.

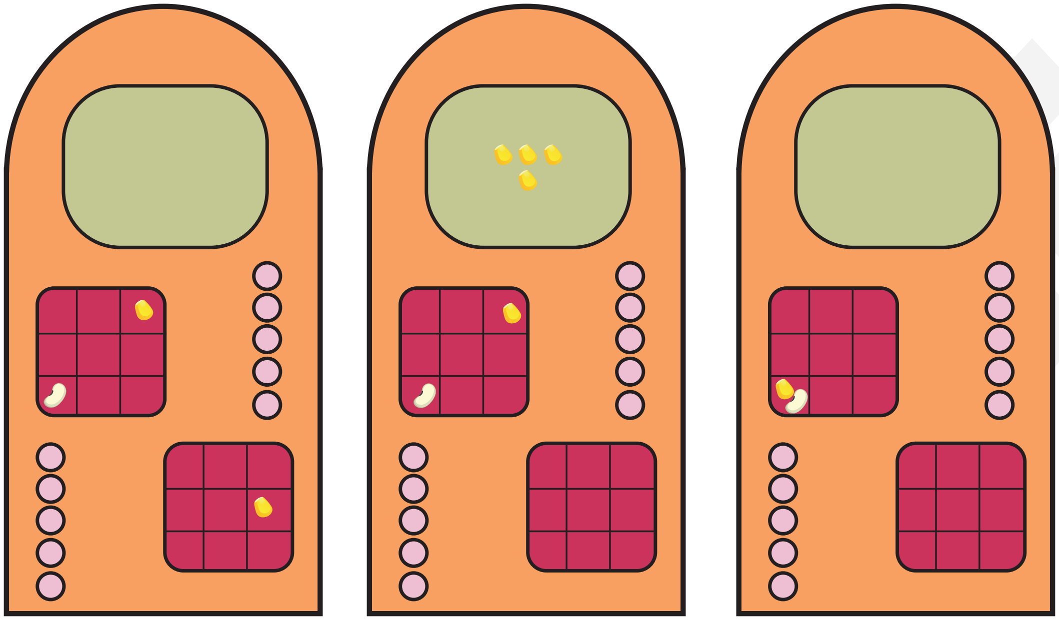


Figura 18. Se desea realizar la sustracción quince menos cuatro (15-4), se ubican las dos cantidades, la primera en el cuadrado superior y la segunda en el cuadrado inferior. Luego, se transforma el objeto del cuadrado inferior en cuatro objetos similares (en función de la casilla donde se encontraba), se ubica estos en la zona 1 para luego mover el objeto respectivo (unidades) en el cuadrado superior. Debe moverse cuatro espacios, se mantiene en el mismo ciclo, simplemente se mueve la representación de las unidades a la primera casilla. El resultado es once. En este caso no hay cambio de ciclo.

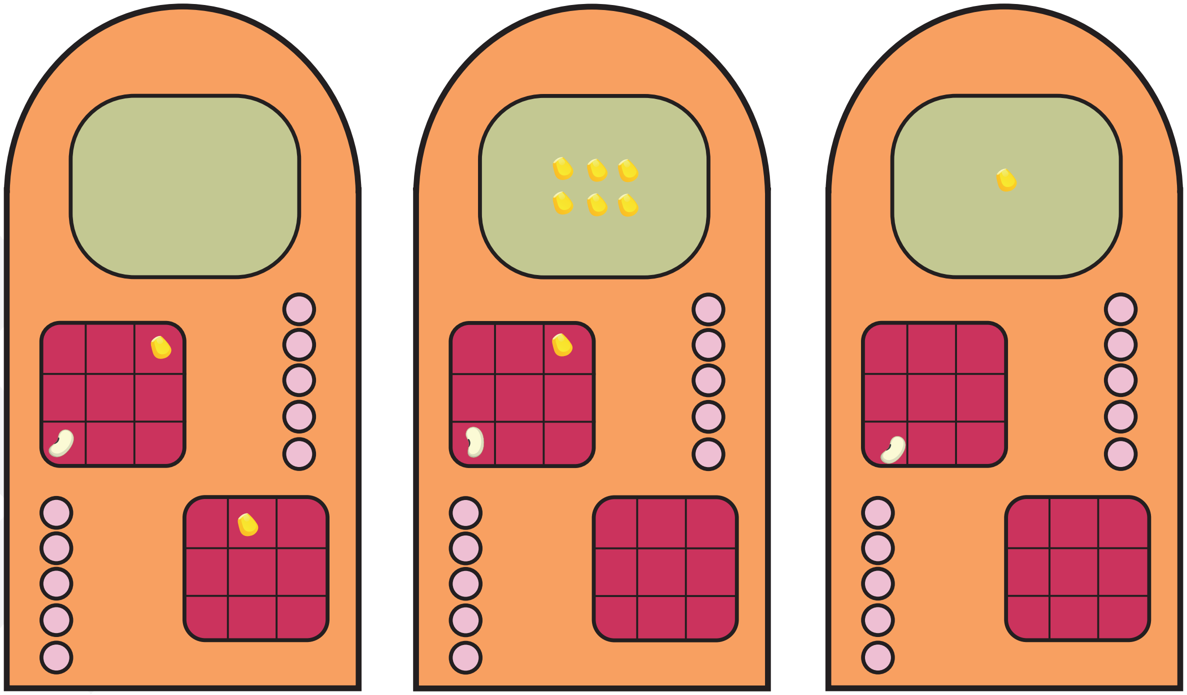
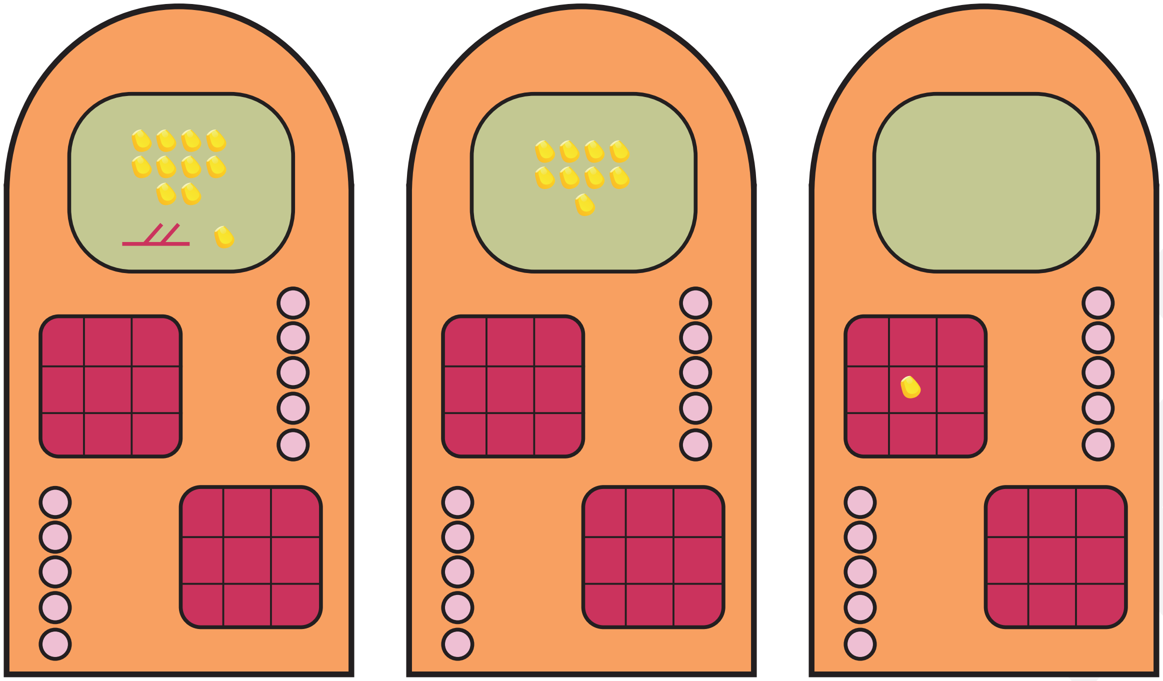


Figura 19. Se desea realizar la sustracción quince menos seis (15-6), para lo cual, se ubican las dos cantidades, la primera en el cuadrado superior y la segunda en el cuadrado inferior. Luego, se transforma el objeto del cuadrado inferior en seis objetos similares (en función de la casilla donde se encontraba), se ubica estos en la zona 1, para luego mover el objeto respectivo (unidades) en en cuadrado superior. Debe moverse seis espacios, pero únicamente es posible mover cinco espacios y el ciclo concluye, se requiere retirar una unidad más, esto no es posible por cuanto en el cuadrado superior se dispone de unidades únicamente, se tiene una decena.



En este caso se regresará en uno el ciclo de las decenas, así el objeto tomado se transformará en diez unidades, las cuales se ubican en la zona 1, allí se retira justamente la unidad que estaba pendiente y en base de las restantes se ubica el objeto complementario respectivo en la casilla del cuadrado superior respectivo. Así, se obtiene el resultado que es nueve. En este caso se ha regresado a un ciclo anterior.

A continuación, la explicación mediante ejemplos simples.

Con lo indicado, se plantea el siguiente proceso para la resta:

1. En el cuadrado superior de la zona 2 representa la cantidad inicial.

2. En el cuadrado inferior de la zona 2 representa la cantidad que se desea restar o retirar.

3. Tomar uno a uno el objeto complementario del cuadrado inferior de la zona 2, transformar en tantos como la casilla de dónde se tomó y esos ubicar en la zona 1.

4. Luego, ubicar el respectivo objeto complementario en el cuadrado superior, de existir se mueve en sentido antihorario regresando a la forma establecida en el proceso de conteo; una casilla por cada elemento. Es posible que el resultado se mantenga en el ciclo o regrese a un ciclo anterior conforme lo explicado en la parte superior de este apartado.

5. De no existir un objeto semejante en el cuadrado superior, tomar un objeto complementario de orden superior, regresar en uno su ubicación en el cuadrado superior, transformar en objetos semejantes al buscado. Luego ubicarlos en la zona 1, sustraer los requeridos y los restantes ubicarlos en el espacio respectivo.

6. Luego de realizar lo indicado con todos los objetos complementarios del cuadrado inferior de la zona 2 y haber ubicado todos los objetos de la zona 1, la cantidad representada en el cuadrado superior de la zona 1 constituye el resultado de la sustracción.

Nota: Para el paso 3 no existe ningún orden en la selección de los objetos complementarios ubicados en el cuadrado inferior.
Ejemplo:

Realizar la sustracción 1032 - 615

De la figura 20 a la 29 se ha desarrollado y explicado el proceso de la sustracción 1032 – 615. En la última figura los cuadrados inferiores de la zona 1 están vacíos, lo que indica que el proceso ha concluido y la cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado de la sustracción. Efectivamente la cantidad representada allí es 417.

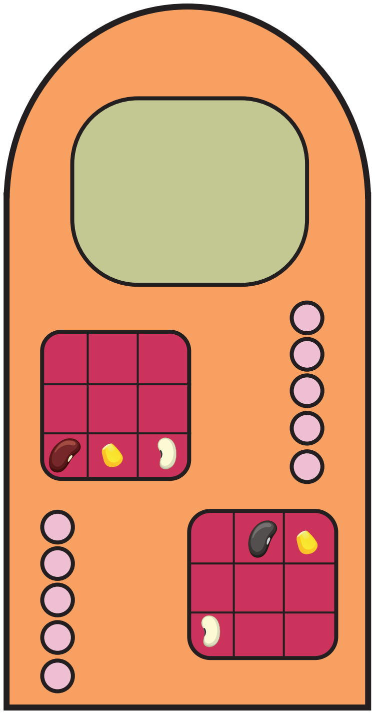


Figura 20. Cumpliendo con lo indicado en los pasos 1 y 2, se realiza la representación de las cantidades para la sustracción, 1032 en el cuadrado superior y 615 en el cuadrado inferior.

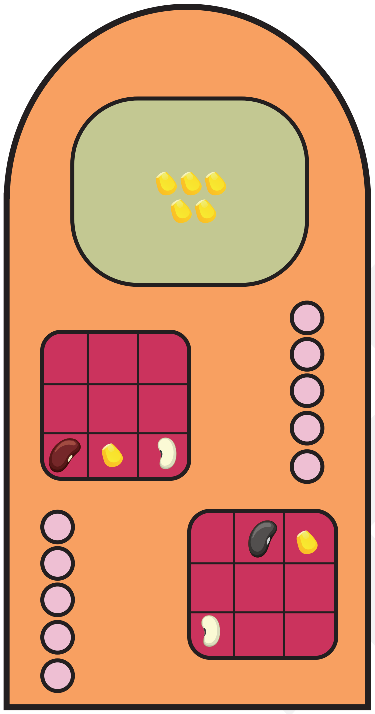


Figura 21. Cumpliendo con el paso 3, se toma el objeto complementario que representa unidades, se lo transforma en cinco de esos (por la casilla donde se encontró) y se lo ubica en la zona 1.

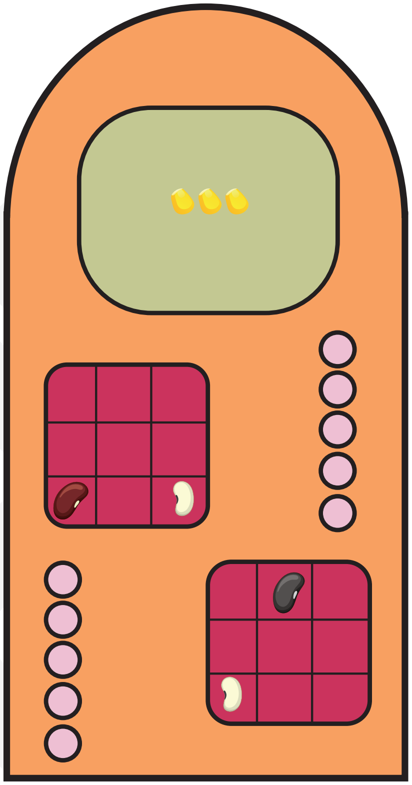


Figura 22. De acuerdo al paso 4 del proceso, es posible retirar dos unidades y concluye el ciclo.

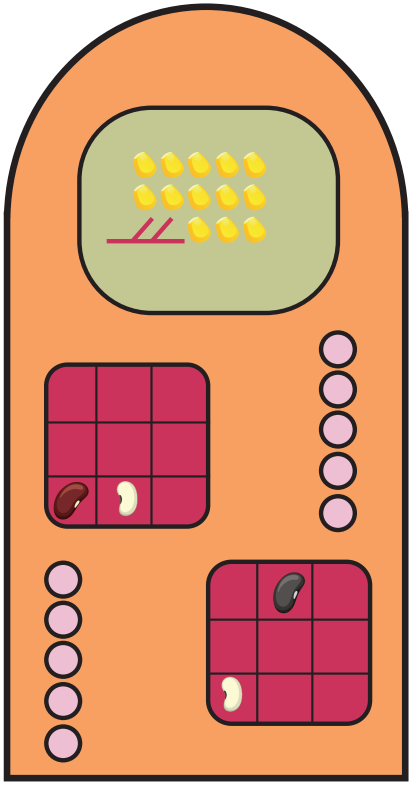


Figura 23. Se toma un objeto complementario de orden mayor (decenas), se regresa en uno su ciclo. Uno de esos objetos se transforma a unidades y se ubica en la zona 1.

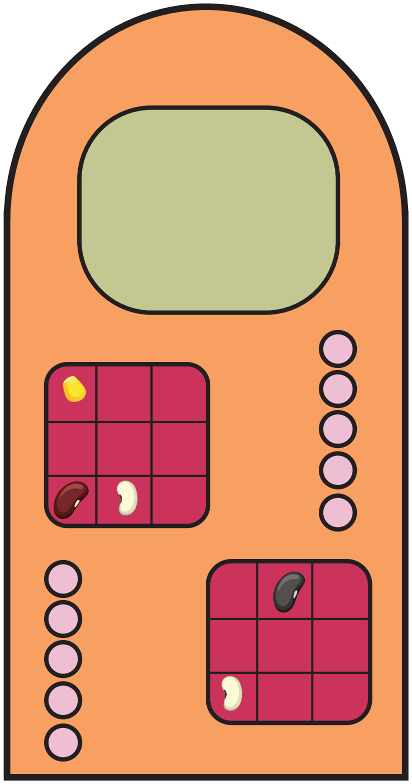


Figura 24. Se retiran las tres unidades pendientes, las siete que quedan en la zona 1. Se representan en el ciclo de unidades del cuadrado superior de la zona 2.

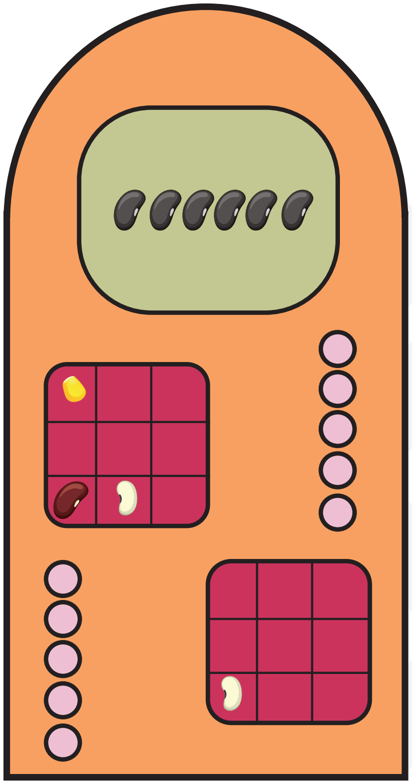


Figura 25. Se toma ahora del cuadrado inferior el objeto complementario que representa centenas, se lo transforma en seis objetos similares y se los ubica en la zona 1.

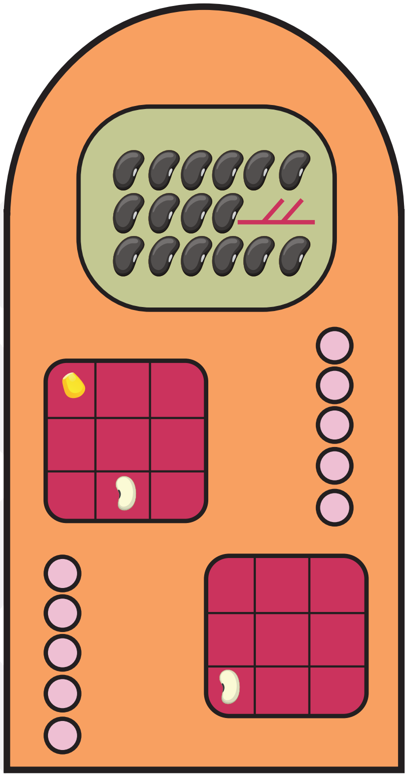


Figura 26. Se toma un elemento de la unidad de mil, regresando en uno el ciclo de estos objetos en el cuadrado superior. Se transforma el objeto tomado en diez centenas que se ubican en la zona 1.

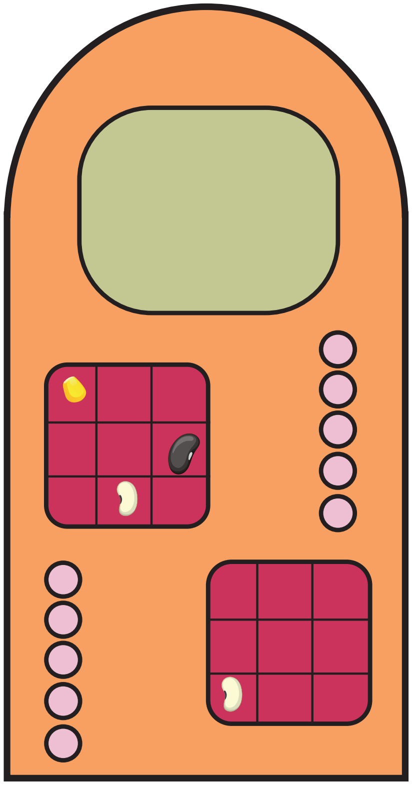


Figura 27. Se retira los seis objetos de zona 1, y se representa en el cuadrado superior el cuatro en el ciclo de las centenas.

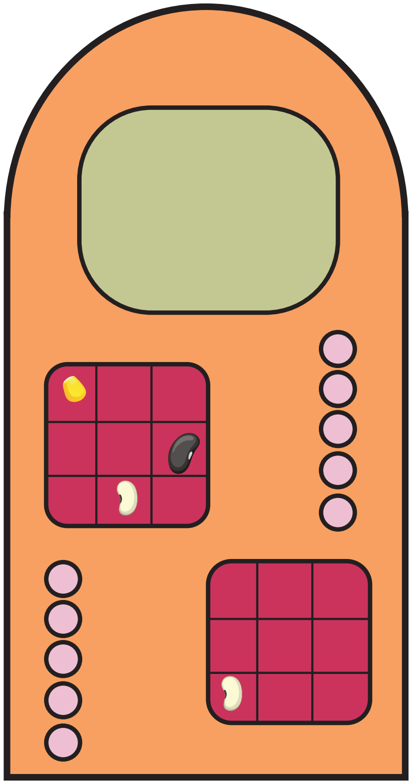


Figura 28. Tomamos el último objeto del cuadrado inferior, que representa decenas (como está ubicado en la primera casilla) y se ubica un objeto de estos en la zona 1.

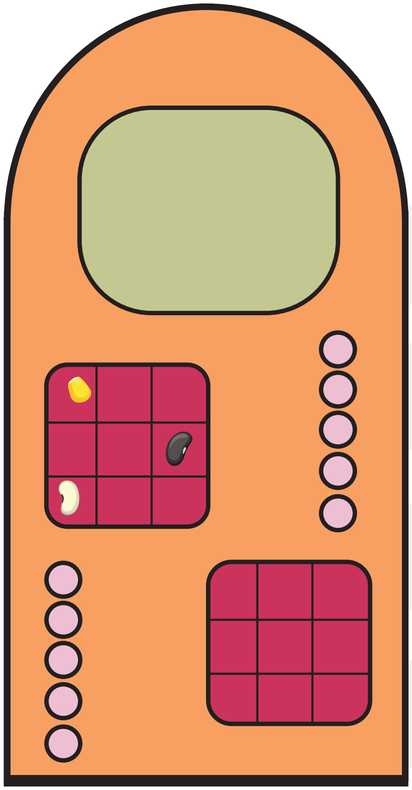


Figura 29. Para eliminar el objeto de la zona 1, se regresa un espacio en el ciclo de las decenas en el cuadrado superior, con lo que se ha concluido la sustracción.

Realizar la sustracción 1032 - 615

De la figura 20 a la 29 se ha desarrollado y explicado el proceso de la sustracción 1032 – 615. En la última figura los cuadrados inferiores de la zona 1 están vacíos, lo que indica que el proceso ha concluido y la cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado de la sustracción. Efectivamente la cantidad representada allí es 417.

Multiplicación

Previo a la explicación del proceso de la multiplicación o producto en el Contador Cañari es necesario recordar que multiplicar es simplemente sumar cantidades iguales un determinado número de veces y claro, podría desarrollarse simplemente haciendo sumas sucesivas.

Mas, la estructura del contador permite simplificar ese proceso, a nuestro criterio la presencia de los orificios en la zona 3 posibilitan desarrollar el producto de una manera más rápida, manteniendo las normas indicadas.

A continuación, el proceso para multiplicar dos cantidades en el Contador Cañari:

1. De las dos cantidades a multiplicar, se debe ubicar una de ellas en el cuadrado inferior cumpliendo las condiciones establecidas.

2. La otra cantidad se ubica en una parte de la zona 1, descomponiéndola en los objetos complementarios.

3. Luego, tomar uno a uno los objetos de la zona 1 y ubicarlos en los espacios de la zona 3, a la vez que sobre el cuadrado superior se ubica el resultado de relacionar (multiplicar) este objeto por los ubicados en el cuadrado inferior.
   Para relacionar los objetos, se debe considerar lo siguiente:

   a. Si el objeto ubicado en la zona 3 representa la unidad, en el cuadrado superior se debe aumentar a lo existente una cantidad idéntica a la representada en el cuadrado inferior.
   b. Si el objeto ubicado en la zona 3 representa una decena, en el cuadrado superior se debe aumentar a lo existente una cantidad que resulte de cambiar cada objeto complementario con uno de orden estrictamente mayor (por cada unidad se ubicará una decena, por cada decena se ubicará una centena, y así sucesivamente).
   c. Si el objeto ubicado en la zona 3 representa una centena, en el cuadrado superior se debe aumentar a lo existente una cantidad que resulte de cambiar cada objeto complementario con uno de orden aumentado en dos (por cada unidad se ubicará una centena, por cada decena se ubicará una unidad de mil y así sucesivamente). Esta lógica se aplicará también para objetos de orden mayor.

4. Una vez tomado todos los objetos complementarios ubicados en la zona 1 y ubicado los resultados, la cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado final de la multiplicación.

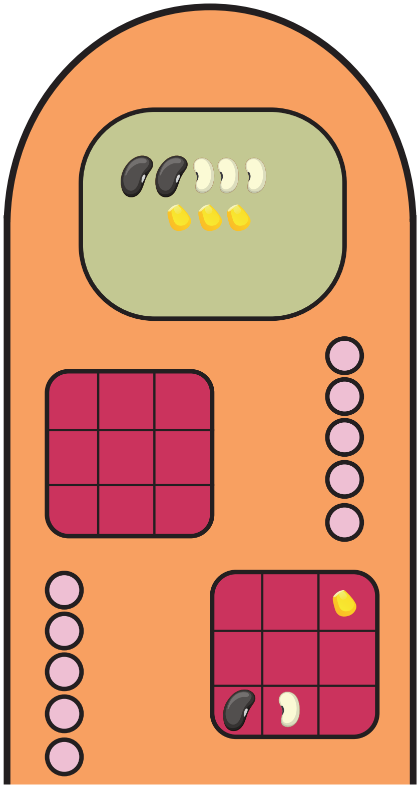


Figura 30. Cumpliendo lo establecido en los pasos 1 y 2, se representa una de las cantidades (125) en el cuadrado inferior y la otra cantidad (243) en la zona 1.

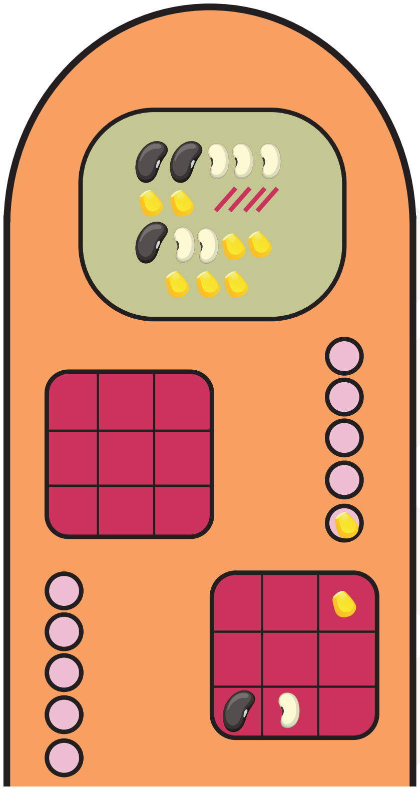


Figura 31. Cumpliendo lo establecido en el paso 3, se toma un objeto de la zona uno, se opera, como es una unidad, en la zona 1 se ubica en objetos descompuestos, la cantidad representada en el cuadrado inferior.

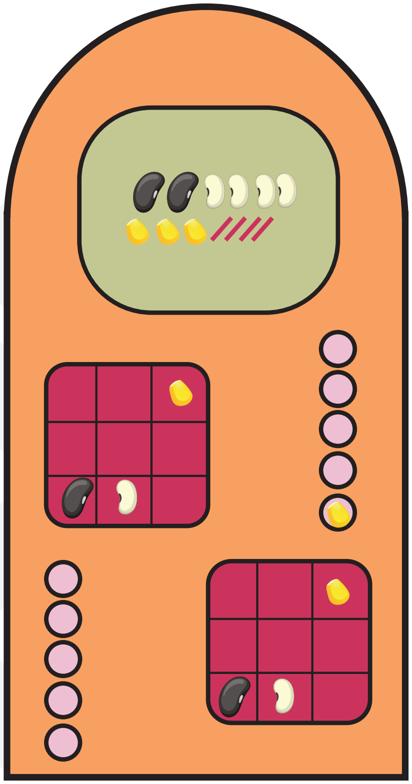


Figura 32. Luego, se acumula esa cantidad obtenida en el cuadrado superior. Cumpliendo así las normas de la suma.

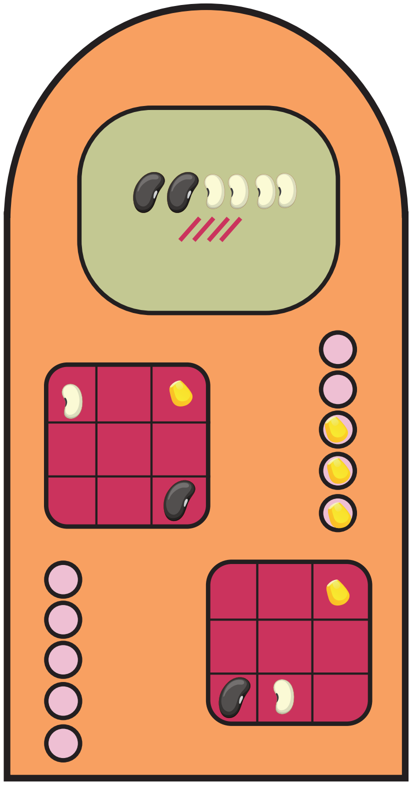


Figura 33. Así se procede con las tres unidades, acumulando las cantidades obtenidas en el cuadrado superior.

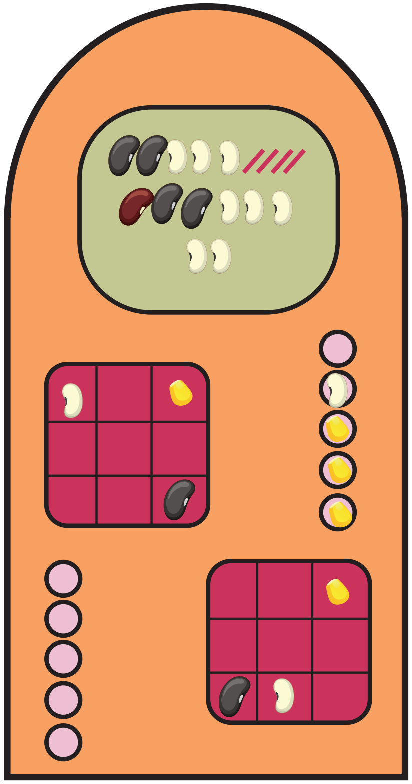


Figura 34. Se toma ahora un objeto que representa una decena que se ubica en la zona 3, además se procede a operar: por cada objeto del cuadrado inferior, se toma objetos de orden estrictamente mayor, tantos como represente la casilla. El objeto de las centenas está en la primera casilla, se tomará un objeto que represente unidades de mil. Como el objeto que representa decenas está en la segunda casilla, se tomará dos objetos que representan centenas y como el objeto de las unidades está en la casilla que representa el cinco. Se tomará cinco objetos que representan decenas, estos se los ubica en una sección de la zona 1.

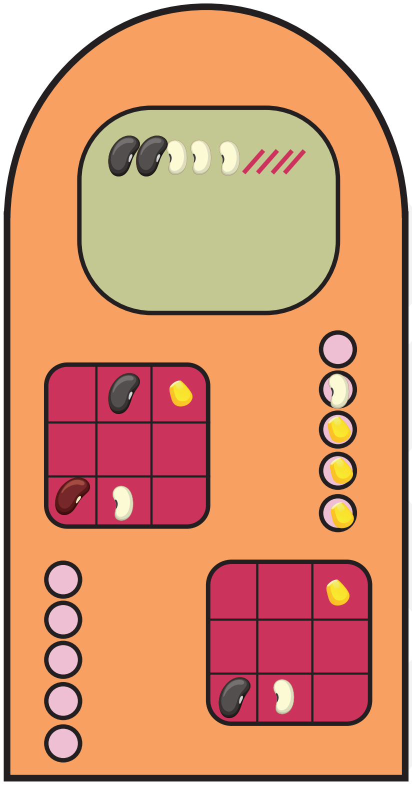


Figura 35. Se acumula la cantidad obtenida en el cuadrado superior.

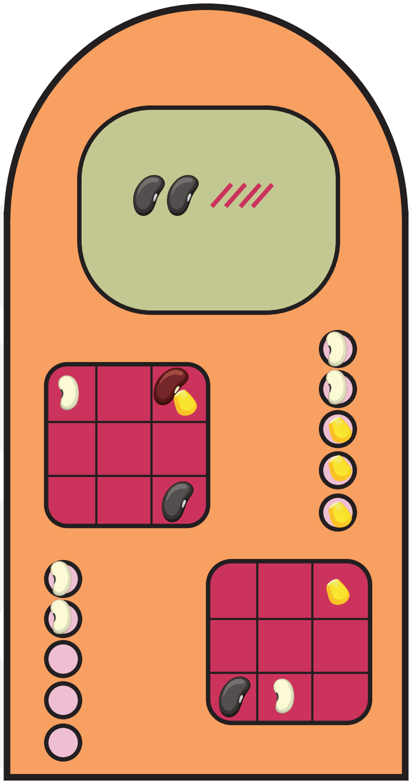


Figura 36. De igual manera, se acumula en el cuadrado superior las cantidades que resultan de operar cada objeto que representa decenas.

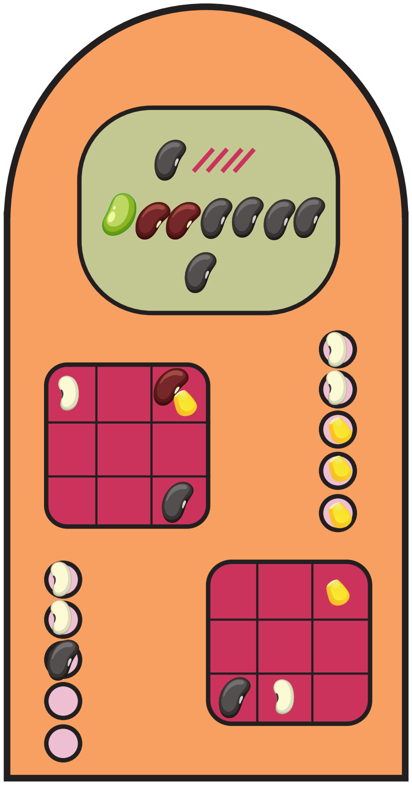


Figura 37. Luego, se toma un objeto que representa centenas, se ubica en la zona 3 y por cada objeto del cuadrado inferior, se ubica en una parte de la zona 1 tantos objetos como la cantidad que represente la casilla donde se encuentre y cuyo orden sea el orden de ese objeto aumentado en dos. Así, como el objeto de las centenas está en la primera casilla, tomaremos un objeto que represente unidad de mil, como el objeto de las decenas está en la segunda casilla, tomaremos dos objetos que representen unidades de mil y como el objeto que representa unidades está en la casilla cinco, se tomará cinco objetos que representen centenas.

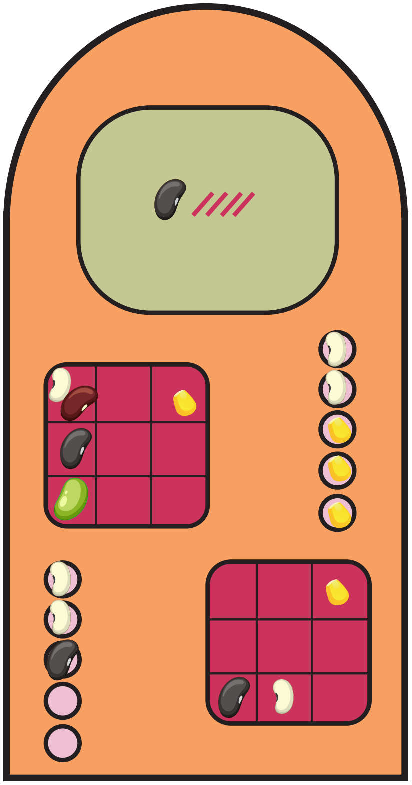


Figura 38. Se acumula la cantidad obtenida en el cuadrado superior.

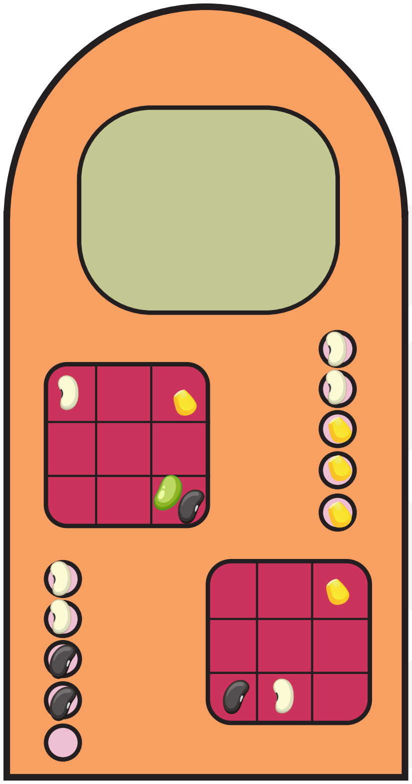


Figura 39. Se acumula la cantidad obtenida en el cuadrado superior.

Nota: La selección para la ubicación de las dos cantidades es indistinta, es decir no existe ningún orden establecido para seleccionar los objetos de la zona 1.

Ejemplo:
Multiplicar 125 x 243
En la figura 38 la zona 1 está vacía, es decir, ha concluido el proceso, por tanto, la cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado del producto. En efecto, la cantidad representada es 30.375, que es el valor correcto para el producto planteado.

División

Es importante recordar primero que dividir significa separar un grupo de objetos en varios grupos con una misma cantidad de objetos, aunque es posible que la división sea exacta. Es decir, que el grupo inicial se divida en algunos grupos distribuyendo exactamente todos los objetos que había en este. Por ejemplo, si se desea distribuir quince bancas en tres aulas el resultado será que en cada aula se ubiquen cinco bancas, de este modo quedan distribuidas todas las bancas, no hay remanente o residuo.

Hay otros casos donde la división no es exacta. Por ejemplo, para distribuir dieciséis bancas en tres aulas, se ubicarán cinco bancas en cada aula y sobrará una. Es decir, hay una banca de remanente o residuo que al ubicarla en un aula ya no se cumple el principio de igualdad que debe garantizar la división o si se "corta" la banca en tres partes, estas no son iguales y dejan ya de ser bancas. En este punto cabe anotar que, esto último va a depender de la naturaleza del objeto, porque, si lo que se desea es repartir dieciséis quesos entre tres personas, a cada persona se puede entregar cinco quesos y dividir el último queso en tres partes iguales y entregarlo, surgiendo ahí, el concepto de parte de unidad, fracción o decimal.

Dicho esto, el procedimiento que se presenta aquí para la división en el Contador Cañari es aquel donde la división inexacta presenta residuos enteros, reiterando que, si se desea, el mismo procedimiento se podría continuar generando decimales.
Un procedimiento directo podría ser a través de restas sucesivas, es decir, ir quitando de la cantidad inicial del grupo cantidades iguales al número de grupos que se desea construir y luego contar cuantas veces fue posible realizar este retiro hasta que el grupo inicial se haya reducido y no sea posible ya hacer ese retiro. Además, la cantidad de objetos que permanezcan en el grupo inicial será el residuo. No obstante, este procedimiento es práctico y útil para cantidades relativamente semejantes, pero resulta tedioso cuando la cantidad de objetos a dividir es significativamente mayor al número de grupos que se desea constituir, por lo cual, se ha estructurado un procedimiento más práctico y general.

A continuación, se presenta el procedimiento que a seguir para dividir la cantidad de un grupo en varios grupos con el uso del Contador Cañari.

1. Representar la cantidad del grupo inicial en el cuadrado inferior del Contador Cañari.

2. Representar la cantidad de grupos en los que se pretende dividir el grupo inicial. Ubicarlos en la zona 1, luego representarlos descomponiendo esta cantidad en función de las representaciones de los objetos complementarios, lo cual, servirá de comparación durante todo el proceso.

3. En la zona 1, en otra sección, construir un grupo cuya estructura (relación entre los objetos complementarios) sea igual al que está en el cuadrado inferior: que represente una cantidad menor o igual a la representada en la otra sección de la zona 1. Determinar la diferencia de órdenes, entre estas dos. Si son de igual orden ubicar un objeto que represente la unidad en la zona 3. Si el orden de la cantidad construida es mayor en uno al otro, ubicar un objeto que represente la decena en la zona 3. Si el orden de la cantidad construida es de orden mayor en dos al otro ubicar un objeto que represente la centena en la zona 3, y así según el caso.
4. La cantidad de cada grupo construido será disminuida de la cantidad representada en el cuadrado inferior.

5. Una vez que la cantidad construida en la segunda sección de la zona 1 sea mayor a la cantidad representada en el cuadrado inferior, cambiar esta cantidad por una de igual estructura, disminuyendo su orden en uno. Además, los objetos ubicados en la zona 3, serán retirados generando incremento en el ciclo respectivo en el cuadrado superior.

6. Al retirar todos los objetos de la zona 3 y la cantidad representada en el cuadrado inferior sea menor a la ubicada en la zona 1 para comparación, la operación habrá concluido.

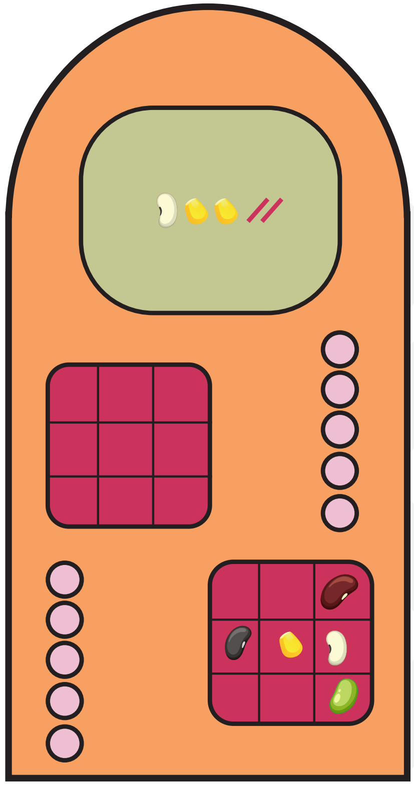


Figura 40. Cumpliendo los pasos 1 y 2, se representa la cantidad a dividir en el cuadrado inferior y el valor para el cual se dividirá en una parte de la zona 1.

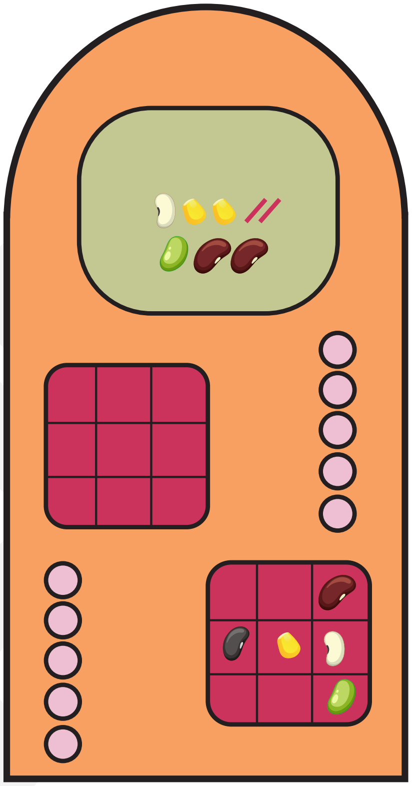


Figura 41. Cumpliendo el paso 3, en una sección de la zona 1 se construye la representacion de una cantidad que, es la mayor. Mantiene la estructura de la cantidad de la otra sección de esta zona y es menor a la cantdad representada en el cuadrado inferior

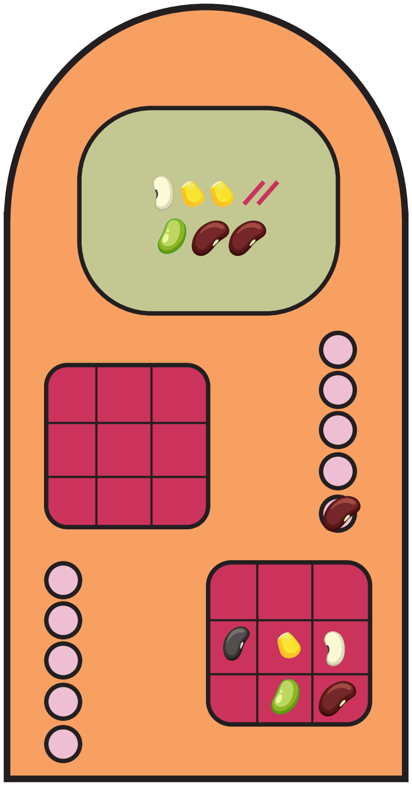


Figura 42. Comparando el orden de la cantidad construida con el orden de la cantidad ubicada inicialmente en la zona 1, la diferencia es tres, por tanto, se ubica un objeto que representa unidades mil en la zona 3 y se disminuye la cantidad que se construyó en la segunda sección de la zona 1 de la cantidad representada en el cuadrado inferior, como la cantidad remanente en el cuadrado inferior es mayor a la construida en la segunda sección de la zona 1, se puede repetir el proceso.

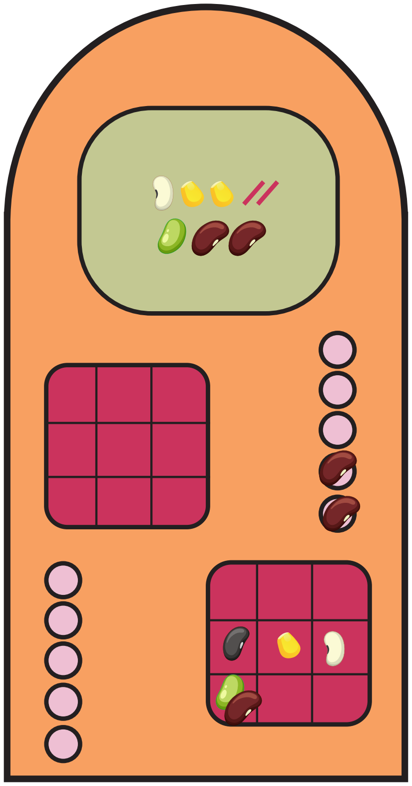


Figura 43. Luego de hacer la segunda disminución en el cuadrado inferior, la cantidad remanente representada en el cuadrado inferior es menor a la construida en la segunda sección de la zona 1

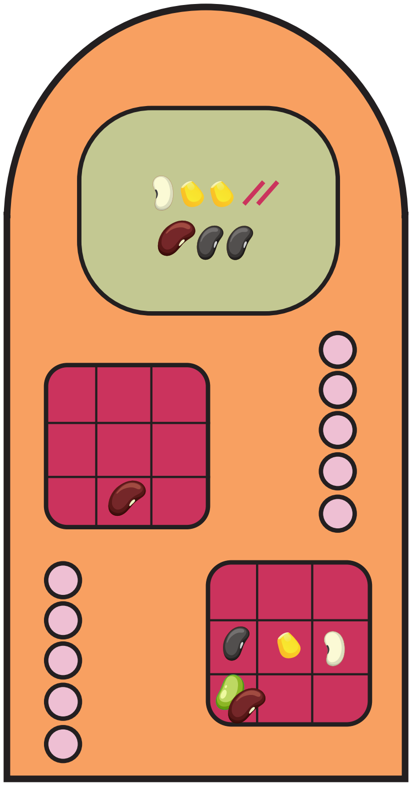


Figura 44. Se baja en uno el orden de la cantidad representada en la segunda sección de la zona 1. Se retira los objetos de la zona 3 y los se los representa en el ciclo respectivo del cuadrado superior. Como la cantidad representada en la segunda sección de la zona 1 es mayor a la cantidad representada en el cuadrado inferior se procede con la sustracción.

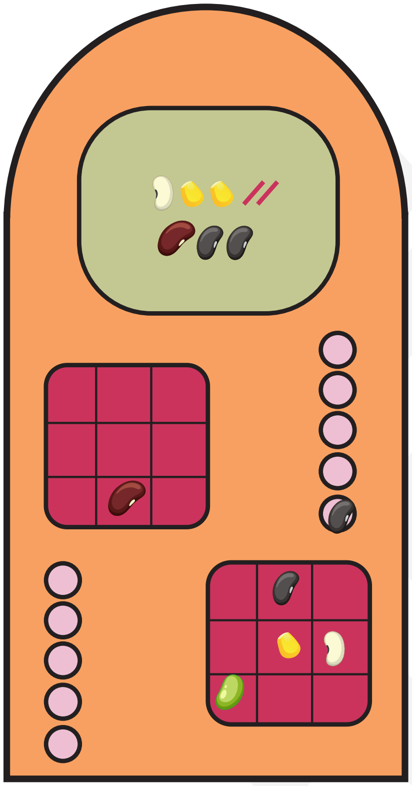


Figura 45. En este caso la diferencia de orden es dos, por lo que se ubica una centenena en la sección 3 y se procede con la sustracción. Se observa que es posible repetir este paso.

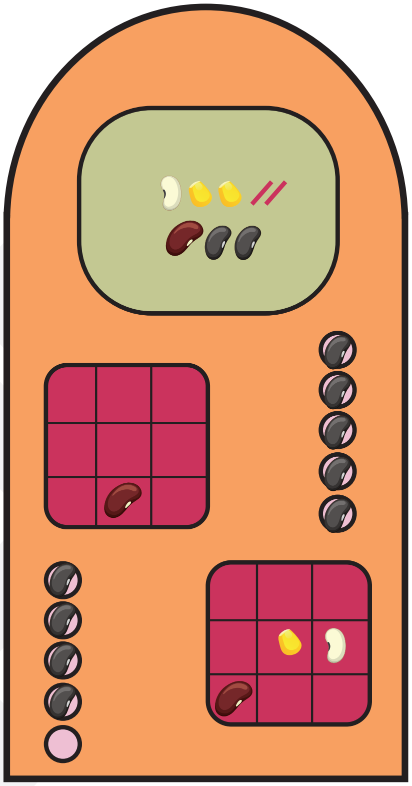


Figura 46. Es posible realizar el proceso nueve veces, hasta que la cantidad remanente en el cuadrado inferior es superior a la representada en la segunda sección de la zona 1.

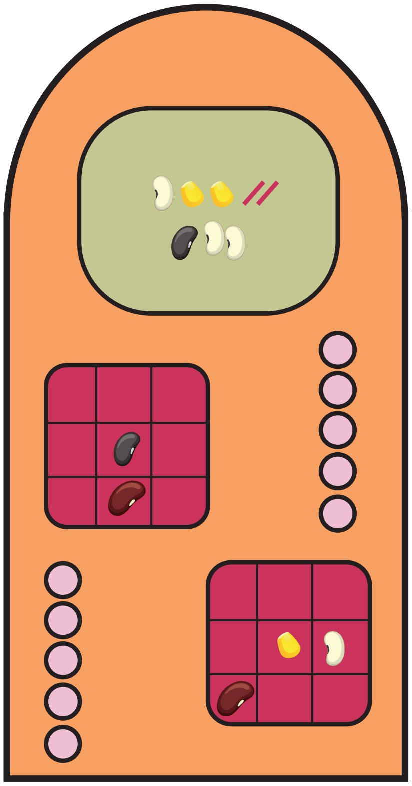


Figura 47. Se ubica la cantidad que representa centenas en la casilla respectiva y se cambia la cantidad representada en la segunda sección de la zona 1, que si es inferior a la representada en el cuadrado inferior.

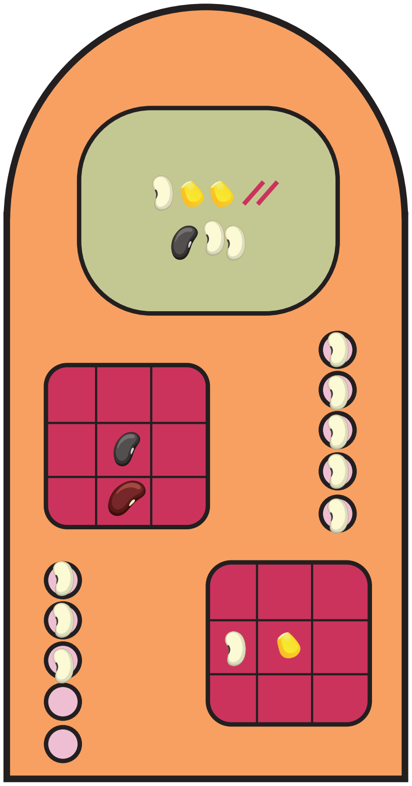


Figura 48. Se puede disminuir ocho veces esa cantidad, en este caso la diferencia de orden es 1, entonces se ubicarán ocho objetos que representan decenas en la zona 3. La cantidad representada en la segunda sección de la zona 1 es menor a la representada en el cuadrado inferior.

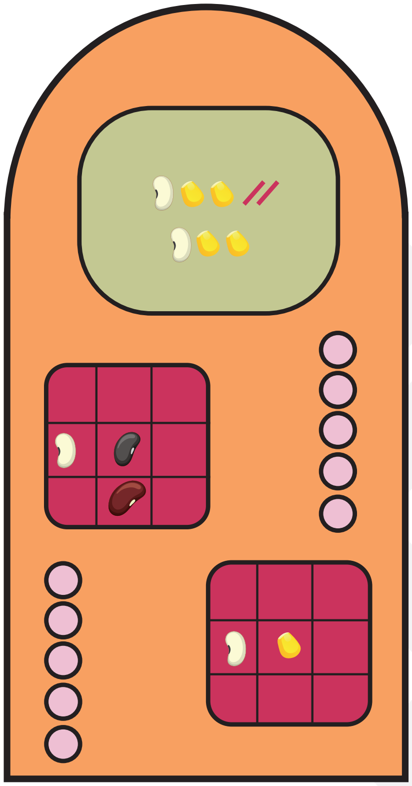


Figura 49. Se cambia en la segunda sección de la zona 1 la cantidad representada por una de estructura similar, pero de orden menor, y como está es menor a la del cuadrado inferior se prosigue.

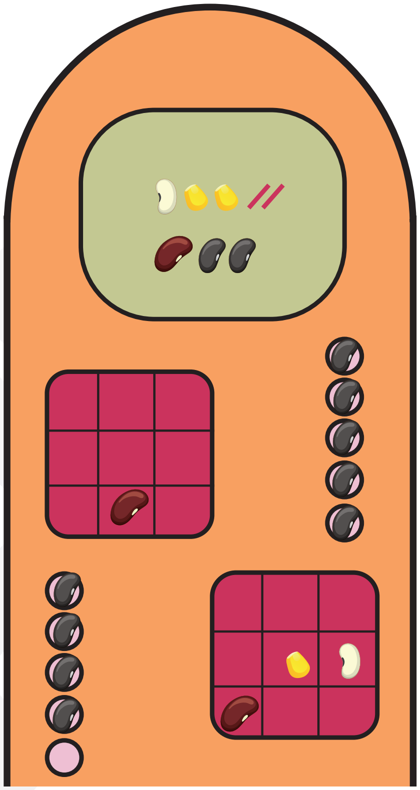


Figura 50. Se han realizado siete reducciones y como las cantidades ubicadas de las secciones de la zona 1 son de igual orden, ubicamoes en la zona 3 siete objetos que representan unidades. La cantidad representada en el cuadrado es menor a la representada en la segunda sección de la zona 1.

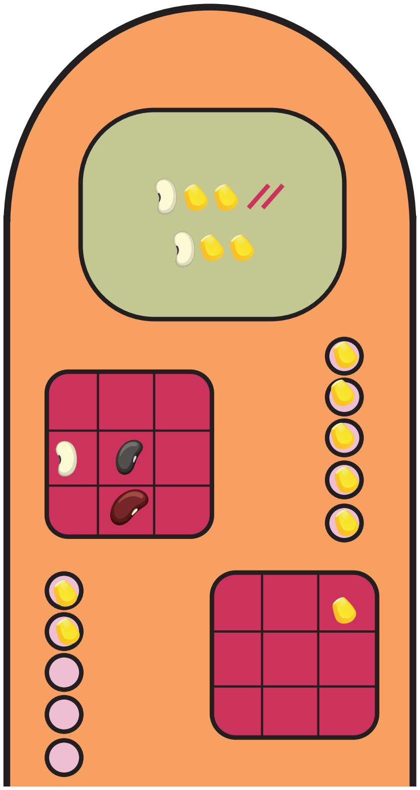


Figura 51. Se representan los objetos de la zona 3 dentro del cuadrado superior. La cantidad del cuadrado inferior es menor a la cantidad representada en la primera sección de la zona 1, consecuentemente la división ha concluido. En el cuadrado superior se representa su resultado y en el cuadrado inferior el residuo.

La cantidad representada en el cuadrado superior es el resultado de la división y la cantidad representada en el cuadrado inferior es el residuo, caso contrario se debe regresar al paso 3 de este procedimiento.

Nota: No hay un orden para la construcción de los grupos únicamente se recomiendo buscar los mayores posibles.

Ejemplo:
Dividir 35.849 entre 12.

La cantidad representada en el cuadrado superior es dos mil novecientos ochenta y siete (2987) y la representada en el cuadrado inferior es cinco (5). Consecuentemente diremos que al dividir 35.849 para 12, el resultado es 2.987 y el residuo 5.

NUMERACIÓN DE BASE 10

El afirmar que el contador cañari se fundamenta en la notación de base diez tiene una explicación que se encuentra en el lenguaje, la designación de cantidades en las distintas formas del quechua se rige por un proceso de yuxtaposición de vocablos (Barazorda, 2021) partiendo de palabras que identifican los números del uno al nueve (huk, iskay, kinsa, tawa, pisqa, soqta, qanchis, pusaq, esqon), que servirían para identificar la cantidad de unidades.

Existen otros vocablos que representan diez (chunka), cien (pachaq), mil (waranka), diez mil (chunka waranqa), millón (hunu), números que son potencias de diez y que son usados para representar cualquier cantidad juntándolos entre sí, por ejemplo el número doscientos cuarenta y cinco se dirá *iskay pachaq tawa chunka pisqayoq* (dos cien cuatro diez cinco) una forma de indicar dos decenas cuatro decenas cinco unidades.

Debe indicarse que a las unidades se les complementa el prefiijo "yoq".
Está claro que la lógica que rige esta numeración se explica muy claramente con la forma como se representan las cantidades en el contador cañari.

CONCLUSIONES

Sin lugar a dudas la característica que diferencia el Contador Cañari es el hecho de que en este existe un espacio físico definido donde se efectúa el cambio de fase, espacio que en este caso se determina como zona 1, espacio de suma importancia ya que en el mismo se llevan a cabo las trasformaciones (ya sean a una de orden mayor o a una de orden menor).

Sin embargo, y a pesar de su importancia, este espacio es transitorio ya que en ninguna de las operaciones los resultados usan o se ubican en esta zona, el mismo se usa para desarrollar instrucciones de transformación o de referencia que ayudan a desarrollar los algoritmos.

Es por ello que en los diseños que se han inspirado en este objeto, denominadas taptanas, este espacio ha sido cambiado por una representación de la luna ya que esta, análogamente, ayuda a entender el cabio de fases en el tiempo.

La explicación de la presencia de los dos cuadrantes similares en el contador cañari recae en el hecho de que el ser humano para realizar las operaciones aritméticas siempre lo hace en función de dos cantidades, así si se requiere sumar tres cantidades o más, se tomarán dos de ellas se realizará la suma entre estas y luego ese resultado lo sumara al tercero y así sucesivamente.

Por lo tanto, si se desea sumar varias cantidades en el contador cañari, las dos cantidades iniciales se ubicaran en los cuadrantes y se construirá su sumatoria en el cuadrante superior, luego se irán incorporando otras cantidades, primero directamente en el cuadrante inferior para luego, mediante el algoritmo de la suma acumularla a la cantidad representada en el cuadrante superior, así hasta sumar todas las cantidades presentadas.

PRINCIPIOS DEL CONTADOR CAÑARI

De lo estudiado en esta investigación es posible concluir que son tres los principios que rigen la operatividad práctica del contador cañari, estas son:

1. Los elementos representativos de cada fase deben distinguirse plenamente de tal formo que no haya riesgo alguno de confusión.
2. Siempre debe existir un espacio físico de transformación de elementos que evidencia el cambio de fase.
3. El orden ascendente en cada fase (del cero al nueve) debe culminar evidenciando un acercamiento a ese espacio físico de transformación.

Estos principios han permitido el diseño de diversas propuestas pedagógicas con metodologías que apoyan significativamente los procesos de aprendizaje.

III.8 Referencias

Arriaga, J. (1992). *Apuntes de arqueología Cañari.* Publicaciones de la Universidad de Cuenca.

Barazorda, W. (2021). *Todos Los Números en Quechua y Su Traducción,* Idioma Quechua*, https://enquechua.com/los-numeros-en-quechua*/2023.

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real: las matemáticas y sus raíces no europeas.* Ediciones Pirámide.
Iglesias, M. (1964). *Los aborígenes del Cañar.* Cañar.

4

CORPUS EPISTÉMICO DE LA MATEMÁTICA SHUAR: OTRA PEDAGOGÍA ES POSIBLE

Fernando A. Yánez B

Universidad Intercultural de las Nacionalidades y Pueblos Indígenas Amawtay Wasi

Introducción

Las evidentes distorsiones, mistificaciones o vacíos que presenta la historia nacional sobre las diferentes nacionalidades y pueblos indígenas del país, han dado lugar a la formación de un sin número de prejuicios que se evidencian en la negación de sus lenguas, saberes, conocimientos y corpus epistémicos. Los procesos de escolarización se caracterizan por utilizar el español y la matemática occidental de base 10 como medios universales de transmisión de conocimientos, desconociendo las especificidades lingüísticas y cognitivas de otras culturas; genera esto problemas de aprendizaje en los niños de las nacionalidades y pueblos indígenas, que se estereotipan como incapacidad lingüística, cognitiva, social y afectiva.

Las nacionalidades y pueblos indígenas son sociedades de tradición oral, a través de la escolarización han empezado a desarrollar y utilizar un sistema de escritura que enfrenta a niños y adultos a realidades diferentes, la oralidad se caracteriza por utilizar todos los sentidos: la vista, el tacto, el oído, el gusto, el olfato para comunicarse y aprender en situaciones reales y con objetos concretos. La comunicación oral va acompañada de gestos, movimientos corporales, diferentes tonos de voz, utilización de objetos concretos, etc. La escritura por el contrario elimina las situaciones reales, los referentes concretos, la utilización de los sentidos y los movimientos corporales; en la escritura la comunicación se desenvuelve en un plano no presente, alejado e hipotético.

Esta situación ha generado que las nacionalidades y pueblos indígenas realicen prestamos de palabras y conceptos del castellano y otras lenguas, así como, que se adapten términos para poder expresar realidades espaciales, temporales, sociales y cognitivas, como cantidades mayores o diferentes a las que su realidad les permite. La constatación de que existen otros sistemas de pensamiento, nos impulsa a comprender, profundizar, ampliar y descubrir las formas implícitas y adaptadas que han permitido a las sociedades de tradición oral, interactuar desde sus corpus epistémicos con una lógica abstracta de la matemática, cuya base es el sistema decimal occidental.

Por otro lado, debemos considerar que las formas de expresión lingüística o gestual en el campo de la numeración, denotan un tipo de estructura mental, que la episteme de cada cultura dispone para expresar la cantidad matemática. Las formas de representación gestual o lingüística, expresan la concepción del espacio y el tiempo, así el español se caracteriza por ser lineal unidimensional, el kichwa por ser espiral tridimensional y el shuar como se muestra en este estudio, es lineal bidireccional.

La concepción del espacio-tiempo de una cultura conforma las características del corpus epistémico de la misma, es decir son los principios lógicos que un sistema de pensamiento tiene para enfrentar situaciones económicas, sociales y matemáticas en su cotidianidad. Evidenciar esta existencia entraña una labor acuciosa, intensa y extensa que lejos de concluir apenas está empezando en este estudio, a favor de diseñar procesos de aprendizaje de la matemática que respondan a las lógicas de los diferentes sistemas de pensamiento de cada cultura en particular.

Aporta este estudio, a que la educación intercultural bilingüe, a más de abordar los conocimientos en lenguas maternas, los aborde también en concepciones matemáticas especificas a sus sistemas de pensamiento, como una forma de potencializar las destrezas cognitivas de los niños, ergo sería su referente epistémico cotidiano el que encontrarían en la escuela, pudiendo, después de ser escolarizados la lógica matemática materna, hacer la transición a procesos de aprendizaje en la lógica de la matemática decimal occidental.

Los Shuar

La nacionalidad Shuar, "untsuri Shuar" (gente numerosa), o "Muraya Shuar" (gente de la colina)", son un pueblo amazónico conocido por sus características guerreras y famosos por reducir las cabezas de sus enemigos, práctica conocida como "tzantza". Se asientan al este de los Andes, son quizás el pueblo más numeroso de Sudamérica, habitan un área bastante extensa del Ecuador, en las provincias de Morona Santiago, Zamora Chinchipe, Pastaza, Napo y Sucumbíos.

El territorio Shuar, está dividido en occidente y oriente por la cordillera del Kutukú de 2000 metros de altura, los que viven en la parte occidental se les conoce como los Shuar fronterizos y son los que tienen contacto directo con las ciudades, donde se asientan los colonos; a los que viven en la parte oriental, se les conoce como los Shuar del interior y tienen contacto esporádico con los colonos de las ciudades de estas provincias.

El piso ecológico se caracteriza por ser una montaña tropical, en donde los ríos provenientes de la serranía caen en forma de torrentosas cascadas, razón por la que se les conoce como "el pueblo de las cascadas". Esta cultura es una de las más importantes e interesantes que existen actualmente en Sudamérica, a pesar del contacto con la cultura occidental, desde mediados del siglo pasado, han logrado mantener su lengua, cultura, conocimientos y valores hasta nuestros días.

Ubicación geográfica del estudio

Este estudio sobre etnomatemática de la nacionalidad Shuar, se realizó entre los años 1995 a 2005, en las provincias de Morona Santiago, Sucumbíos y Zamora Chinchipe, se recoge en este estudio la memoria colectiva de los ancianos Shuar Maruja Mukuimp, Dionisio Yurank, Carmelina Tsawant, Felipe Purch, Benjamín Tsahuant, Antonieta Ungucha, Ernesto Ungucha, Rosa Nungaime, Josefina Jempets, Miguel Shirap, Juanita Chiripa, Josefina Kayap.

Metodología de estudio

El presente estudio se ubica en el campo de la Etnografía, busca describir de manera específica el sistema matemático de la cultura Shuar, a partir de la utilización de discernimientos y categorías provenientes del trabajo de campo, la vocación etnográfica nos permite mostrar el funcionamiento, estructura y cosmovisión de la Matemática en una cultura diferente, comprender el problema y el significado del cambio en la escolarización de la matemática en las diferentes comunidades, por lo tanto resulta un estudio sincrónico antes que diacrónico.

Por otro lado, y en tanto se ensaya la reconstrucción de una cultura matemática, en base al análisis de la cosmovisión, la estructura lingüística y el uso socio-cultural de la matemática propiamente dicha; este estudio se enmarca dentro de lo que D´Ambrosio define como etnomatemática "…el arte o la técnica de entendimiento, explicación, conocimiento, abordaje y dominio del contexto natural, social y político, que se sustentan sobre procesos de contar, medir, clasificar, ordenar e inferir, lo cual resulta de grupos culturales bien definidos" (citado en Scott, 2021, p. 285).

Marco conceptual

En lo que respecta, al aparato conceptual que se utiliza en el presente estudio, merece destacarse la categoría de "matematicidad" definido por Kawaguchi como "[…] la capacidad de cuantificación y cálculos hipotéticamente presentes en la mente humana." (citado en Covaz, 1987, p. 41), este concepto nos ayuda a visualizar desde una perspectiva cultural, la numeración y el cálculo como productos intelectuales que se definen en contextos específicos y asociados con intereses culturales y prácticos bien definidos.

La categoría de "matematicidad" aplica de todas maneras una categoría intelectual, elaborada por el pensamiento occidental, que, si bien es una limitación, es también un referente para discernir y reconstruir los sistemas numéricos y los procedimientos que se utilizan para realizar cálculos. Como señala Zalavasky que las "…evidencias culturales sugieren que la matemática ha florecido en todo el mundo, y que los niños se benefician de ella, aprendiendo como prácticas matemáticas provenientes de las necesidades reales y deseos de las sociedades" (citado en Villavicencio, 1993, p. 234). Por lo tanto, para lograr una comprensión adecuada de un sistema matemático diferente, es necesario ubicarlo dentro de las necesidades y usos que recibe dentro de la sociedad definida en este estudio.

Suele pensarse que la ausencia de palabras para contar, indica ausencia de conceptos matemáticos, está la razón por la que los estudios etnomatemáticos se dedicaron por mucho tiempo a la recolección de datos de carácter lexical, que por lo general llegan a confundir, debido a que los números no siempre se expresan en palabras. La expresión de la cantidad en varias culturas puede ser gestual y tienen relación directa y proporcional con las necesidades sociales, culturales y económicas cotidianas de un grupo social específico.

En el campo de la investigación lingüística Greenberg (1978) señala que toda lengua tiene un sistema numeral de ámbito finito, es decir que los números que se pueden expresar verbalmente, en cualquier idioma tienen un límite, incluso en los idiomas que tienen complicados sistemas de notación y representación gráfica. Algunos de los sistemas numerales estructuran su orden en la suma, definiéndose esencialmente el orden al momento de contar, es por lo tanto necesario identificar las formas en que los sistemas numerales se conforman desde un análisis lingüístico etimológico de los números.

El análisis etimológico ayuda a encontrar la referencia lingüística con el concepto original, es decir las entidades que pueden haber constituido sus raíces, como las partes del cuerpo; un ejemplo de esto lo encontramos en la lengua de los Chachis[1], el Cha´palaachi en donde el número 5 se expresa como manda que significa mano, el número 10 se expresa como paitya que significa 2 manos, el número 20 se expresa como mancha´lura que significa 2 manos y 2 pies (Yánez, 2001, p. 18).

Un estudio lingüístico debe distinguir entre numeración y cálculo, preguntándose si la capacidad para contar puede existir independientemente de calcular; existe una interdependencia entre numeración y cálculo, según Greenberg (1978) esto es casi universal en razón de que está fosilizado en el sistema lexical, un proceso de cálculo, que, según los idiomas, incluye suma, resta, multiplicación y en algunos casos división. En poquísimos idiomas del mundo existe también una operación que ha sido denominada ultra-cuenta o contar más allá; un ejemplo de esto lo podemos encontrar en el idioma de los Waodani[2], el Wao Terero, su sistema se basa en la suma así: aruke (1), me (2), mea go aruke (3=2+1), mea go mea (4=2+2) (Yánez, 2001, p. 18).

Otra categoría que se debe destacar es la concepción del espacio tiempo, la representación gráfica de la serie numérica responde a parámetros de linearidad (horizontal o vertical). Cassier (2017) afirma que el “orden de progresión” presente en el sistema numérico escrito occidental, presenta una concepción lineal con dos posibilidades de dirección que estamos habituados a operar: dirección horizontal de izquierda a derecha y dirección vertical de arriba abajo (Figura 1).

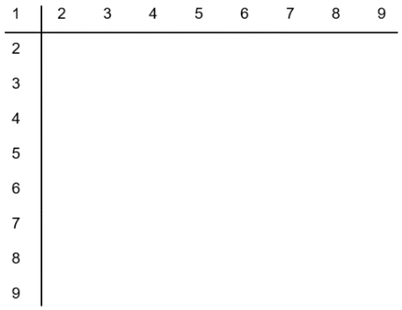


Figura 1. Progresión lineal del sistema numérico occidental

1 Los Chachis son una nacionalidad indígena del Ecuador, ubicados en el noroeste de la provincia de Esmeraldas, su lengua es el Cha´palaachi, según el último censo de población y vivienda del INEC 2010 son alrededor de 10.200 personas.

2 Los Waodani están ubicados en la amazonia ecuatoriana en las provincias de Orellana, Napo y Pastaza, su lengua es el wao terero, según el último censo de población y vivienda del INEC 2010 son alrededor 2.000 personas.

Fuente. Elaboración propia

Goblet (2009) mantiene la hipótesis de que el cristianismo incorpora a occidente la noción de tiempo lineal, estableciendo un origen y final absolutos y universales, la "doctrina cristiana defiende que el tiempo es lineal (proceso hacia un destino divino) y finito (día del juicio final)"; ergo la cultura occidental maneja una concepción del tiempo lineal, cuyos componentes son pasado, presente y futuro.

Para identificar la noción de tiempo pasado, presente y futuro, Yánez (2009), traspone a la progresión de izquierda a derecha de la recta numérica finita, el manejo del tiempo que hace la cultura occidental, de la siguiente manera el pasado esta atrás, el presente es lo que se vive y el futuro está adelante (Figura 2).

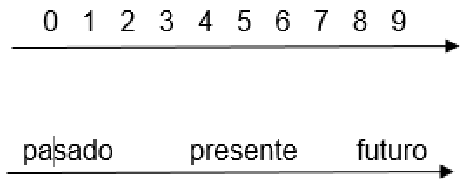


Figura 2. Concepción del tiempo de la cultura occidental

Fuente. Elaboración propia

Para identificar la noción de tiempo, relacionadas a las partes del día: mañana, tarde y noche, Yánez (2009), traspone a la progresión de arriba a abajo de la recta numérica finita con las partes del día, en este caso, el manejo del tiempo que hace la cultura occidental, corresponde arriba a la mañana, al medio a la tarde y abajo a la noche esta abajo (Figura 3).

Figura 3. Concepción de las partes del día

Fuente. Elaboración propia

El manejo del tiempo de acuerdo a la progresión de la recta numérica en sus dos posibilidades: horizontal y vertical, representan un caso particular de círculo en la concepción del espacio tiempo, que difícilmente el español desde sus reglas sintácticas y semánticas logra establecer (Figura 4).

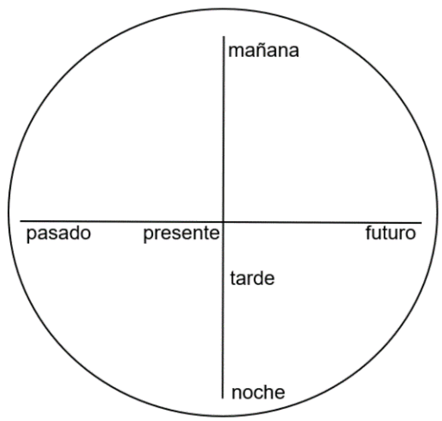


Figura 4. Concepción del espacio tiempo circular

Fuente. Elaboración propia

La recta numérica en su progresión horizontal corresponde a la concepción del tiempo que tiene un individuo frente al pasado, presente y futuro. La progresión vertical corresponde a la concepción de las partes del día mañana, tarde y noche.

Se puede colegir por lo expuesto, que la lógica del sistema de pensamiento de la cultura occidental está determinada por la forma en que se maneja el espacio y el tiempo. La progresión de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo de la recta numérica, sine qua non, determinan las formas lógicas que se utilizan para resolver operaciones aritméticas; se utilizan de manera simultánea las dos direcciones de la concepción lineal. Se escriben las cantidades de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, en el proceso abstracto de resolución de operaciones aritméticas, produciéndose una relación sintagmática y paradigmática (Figura 5).

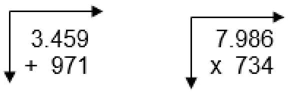


Figura 5. Relación sintagmática y paradigmática de las operaciones

Fuente. Elaboración propia

En el caso de estas operaciones y "en términos lingüísticos, se trata de una relación sintagmática correspondiente a la escritura como tal y, de una relación paradigmática en el proceso mismo de las operaciones" (Yánez: 1985). Son las formas en las que leemos las cantidades, de izquierda a derecha, y los procesos que utilizamos para el desarrollo de las diferentes operaciones matemáticas, de arriba hacia abajo.

La linealidad presente en la progresión de izquierda a derecha de la recta numérica, la concepción del tiempo principio y fin, la relación sintagmática y la paradigmática, determinan las estructuras de pensamiento que permiten hacer analogías en la lógica formal. Si planteamos la siguiente proposición: Ana es pequeña con relación a Beatriz, y esta es pequeña con relación a Carmen, y hacemos la siguiente pregunta: ¿Quién es pequeña, Ana, Beatriz o Carmen?, la respuesta se encuentra en la progresión lineal de los tamaños, Ana es pequeña por la posición que ocupa en el espacio, de acuerdo al tamaño creciente que se genera en la progresión lineal (Figura 6).

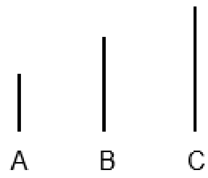


Figura 6. Estructura de pensamiento de la lógica formal occidental

Fuente. Elaboración propia

Yánez (1985) al estudiar como los kichwas ubican objetos en el espacio, encontró que "...ubican los elementos en forma circular con un grupo central o, también en forma espiral. En los dos casos, sin embargo, el grupo central o inicial de espiral es el primer referente del conteo o del cálculo y en términos lingüísticos constituyen el ñaupa (primero, comienzo, adelante) y numéricamente representan el shuc (uno)" (Figura 7).

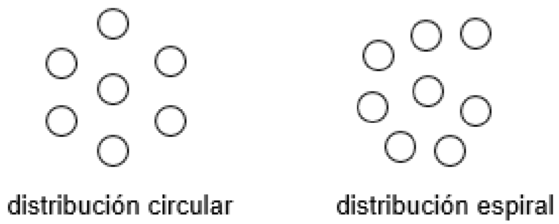


Figura 7. Concepción del espacio circular en la cultura Kichwa

Fuente. Elaboración propia

La concepción circular del manejo del espacio, determina y orienta el pensamiento matemático de la cultura Kichwa, en consecuencia, los diversos grados de cálculo sean estos gestuales, orales o mentales tienen características espaciales circulares y no puramente lineales. Esta concepción circular del espacio, la encontramos en la taptana, piedra de cálculo encontrada en los asentamientos de lo que hoy se denomina provincia de Cañar, la misma que se utiliza hasta la actualidad en las escuelas para generar procesos de aprendizaje de las matemáticas desde está cosmovisión circular; con relación a la piedra en mención Arriaga (1922) señala que se trata de un contador con las características de un ábaco, en cuyas matrices los números del 1 a 9 forman una espiral numérica (Figura 8).

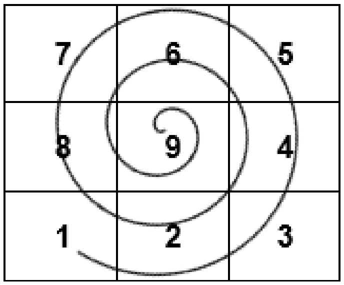


Figura 8. Espiral numérica del sistema de pensamiento de la cultura Kichwa
Fuente. Elaboración propia

La forma en la que se ubican los números en las matrices de la taptana, da cuenta, que en la cosmovisión matemática Kichwa, la progresión de la serie numérica forma una espiral, a diferencia de la cultura occidental que forma una recta numérica; podemos inferir que en el corpus epistémico de está matemática, no existe una recta numérica, sino, un espiral numérico.

La concepción circular del tiempo es común en los primeros estadios de desarrollo de las culturas china, persa, azteca, hindú, egipcia, etc., estas culturas "planteaban una forma repetible o cíclica, es decir, la idea del eterno retorno (eternidad al comienzo de los tiempos) basado en los movimientos astronómicos" (Cladellas, 2009, p. 212), a diferencia de las religiones hebrea y cristiana cuya doctrina sostiene la permanencia de un tiempo lineal.

El calendario andino agrícola muestra un tiempo cíclico, la sombra del Sol forma un espiral compuesto de cuatro períodos que corresponden a la preparación del suelo, siembra, aporque y cosecha, estos se repiten anualmente, esto "constituye una rememoración del pasado o de los pasados, más un progreso correspondiente al año venidero de acuerdo con el mismo esquema anterior" (Yánez, 1985, p. 121), (Figura 9).

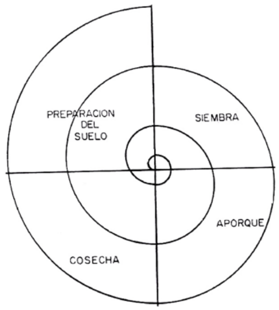
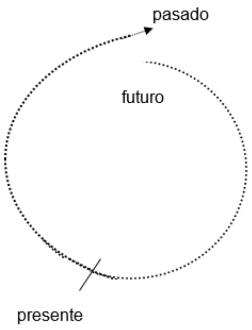


Figura 9. Calendario andino agrícola
Fuente. Elaboración propia

Está rememoración del pasado o de los pasados en el espiral del calendario agrícola, hacen que, en la concepción del tiempo el pasado este adelante, el presente es lo que se vive y el futuro este atrás. Podríamos inferir que la concepción que una cultura hace del tiempo, determina valores, ideologías y formas de ver el mundo, mirar el futuro como horizonte predispone a una lógica competitiva y de consumo, mirar al pasado como horizonte predispone a reflexionar los actos del presente de manera



reflexiva, colaborativa y comunitaria, (Figura 10).

Figura 10. Concepción del tiempo de la cultura Kichwa

Fuente. Elaboración propia

Hemos descrito de manera general la existencia de dos concepciones del espacio tiempo, una lineal y otra espiral; el desarrollo de este estudio muestra en el texto que precede la existencia de una forma de manejo del espacio tiempo lineal bidireccional por parte de la cultura Shuar, que se refleja en su sistema numérico, concepción del tiempo y formas de organización social.

El conocimiento es el espacio natural de disputa entre poderes, Adams (1975) refiere que esta disputa se genera entre el poder delegado y el poder otorgado, los conocimientos científicos reconocidos por la sociedad versus los conocimientos locales, sustratos de resistencia de colectividades históricamente asiladas, colonizadas o esclavizadas. Subyacen los primeros como un poder delegado por las universidades a través de un título y los segundo a través de un poder otorgado por la memoria histórica que resiste en las comunidades, y que se reconocen socialmente con el estatus de ancianos, sabios, poseedores del conocimiento. El corpus epistémico de la matemática Shuar que se presenta en este estudio, de acuerdo a Goblet (1993) es un medio para que el poder otorgado irrumpa en la estructura de dominio, incorporando el saber matemático propio a los espacios institucionales que desconocen otras epistemologías y por lo tanto las discriminan.

A esta disputa de poderes en el terreno del conocimiento, Bourdieu (2000) le denomina capital simbólico, el conocimiento occidental ejerce violencia simbólica y arbitrariedad sobre el capital simbólico de los conocimientos locales, bajo la justificación de que los primeros son científicos y los segundos no. El aporte de este estudio radica en dar estatus al capital simbólico de la matemática Shuar, incorporando estos saberes a las instituciones educativas que de manera natural los discriminan, legitimando la matemática Shuar, como dice Bourdieu (2000) cada grupo se legítima a uno mismo, deslegitimizando al otro.

La categoría de estructuras cognitivas propuesta por Piaget (2018) nos permiten analizar la lógica tácita presente en la matemática Shuar, señala que la experiencia cognitiva es asimilada a través de acciones sensorio motrices, pre operatorias, operatorio concretas y formales. La lógica sensorio motriz se refiere al descubrimiento a través de la utilización de los sentidos y de la motricidad, se caracteriza por ser totalmente experiencial. La lógica pre operatoria es la capacidad de adquirir conocimientos utilización de los sentidos y la motricidad. La lógica operatoria concreta permite expresar estructuras lógicas con acciones concretas ligadas a objetos y situaciones reales. La lógica formal es la capacidad de utilizar estructuras lógicas de manera abstracta en situaciones alejadas de la realidad inmediata.

Si bien identificar el tipo de lógica que utiliza la matemática Shuar, es el objetivo del desarrollo de este corpus epistemológico, es importante identificar como se forma la noción de número en está episteme particular, para esto es necesario identificar las formas en las que se procede a clasificar, seriar, concebir, corresponder y conservar la cantidad.

Se entiende por capacidad para clasificar, a la forma en la que se ordenan elementos de cualquier tipo en varias clases. La capacidad para hacer series es la habilidad cognoscitiva que implica la coordinación de relaciones, considerando que los objetos se ordenan o jerarquizan con base en alguna dimensión. La noción de número es una estructura cognitiva producto de la acción de ejercicios de clasificación y seriación.

Por otro lado, la comprensión de número se da a través de la correspondencia de uno a uno y la conservación. La correspondencia de uno a uno es la capacidad para colocar por parejas, dos o más grupos de objetos, en su relación de uno a uno. La conservación es la capacidad para relacionar el número de objetos de un conjunto con el símbolo que los representa, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen los objetos.

Este marco conceptual nos permite identificar el corpus epistémico de la matemática Shuar, desde la forma en que ellos manejan el espacio tiempo al contar con dedos de manos y pies, esta concepción determina las narrativas de la cultura, la organización de los tiempos sociales y productivos, y las formas lógicas que este sistema de pensamiento, tiene para resolver problemas específicos en su cotidianidad.

Hallazgos del estudio de la matemática Shuar

Los principales hallazgos que se describen en este apartado hacen relación al nombre que los Shuar utilizan para designar los rudimentos matemáticos, las forma en las que cuentan objetos utilizando los dedos de las manos y de los pies, las características del sistema numérico gestual, la forma en que se registran cantidades mayores a veinte, las evidencias de un sistema de numeración vigesimal y finalmente un recorrido por los cambios que presenta el sistema numérico shuar resultado del contacto con colonos y especialmente con los procesos de escolarización que les obligó a realizar préstamos lingüísticos y procedimentales del español y kichwa respectivamente.

Nombre Shuar para la matemática

La vida cotidiana enfrenta a los hombres, a resolver problemas que tienen implícitas características matemáticas, como la construcción de viviendas, registro de cantidades, repartición de bienes, alfarería y artesanías, así, a la capacidad de la cultura Shuar para utilizar cálculos y medidas en las diferentes actividades de la vida cotidiana se la conoce con el nombre de “nekapmartin”, que en su adaptación al castellano significa: cálculo, conteo, medida, exactitud.

Memoria histórica de la forma de contar

El sistema de numeración se origina cuando Etsa (Sol) elabora cinco flechas, hechas con maderas de diferentes tipos de palma: ináyu, tindúki, kunmgúki, koágshi y mamatsinsáka; maderas que permiten fuerza y precisión en las flechas. Etsa entregó a Kujáncham (zorro) las flechas, contándolas doblando los dedos de la mano izquierda, como se puede ver en la tabla 1.

Tabla 1. Memoria histórica de la forma de contar

Frecuencia de uso	Dedos de la mano izquierda doblados	Utilización de manos	Tipos de palma
1era. flecha	dedo meñique		Ináyu
2da. flecha	dedo anular		Tindúki
3era. flecha	dedo medio		Kunmgúki
4ta. flecha	dedo índice		Koágshi
5ta. flecha	dedo pulgar		Mamatsinsáka

Fuente. Elaboración propia

El mito cuenta que Etsa encargó a Kujáncham probar las nuevas flechas disparando a los monos negros, para evitar que se coman las frutas de los árboles, para evitar que la población se quede sin alimentos. Este salió en busca de monos y cuando los encontró empezó a disparar. La primera flecha ináyu salió volando y cayó fuera del territorio, en este lugar creció una palma de este tipo, por esta razón, no crece en territorio Shuar y se ven obligados a comprarla en otros territorios, para poder elaborar estas flechas. Al disparar la segunda flecha tindúki, esta voló sobre la cabeza de los monos y donde cayó creció una palma de tinddúki. Al disparar la tercera flecha akungúki, volvió a fallar y donde cayó creció una palma de akungúki. Luego disparó la flecha koágshi, falló como en los casos anteriores y donde este cayó creció una palma koágshi. Por último, disparó la flecha mamatsinsáka que pasó junto a los monos y cayó en el suelo tan lejos que no saben dónde creció, razón por lo que los Shuar conocen esta palma solo de nombre.

Regresó Kujáncham y Etsa le preguntó: ¿cuántos monos de los que comen fruta fresca has bajado?, este avergonzado mintió diciendo: no he visto a ningún mono. Etsa, enfureció por la mentira, agarró a Kujáncham por el cuello y le vertió agua de tabaco en la boca, diciéndole, por haber mentido de hoy en adelante pasarás hambre. Existe la creencia, de que, si Kujáncham no hubiera fallado en los intentos de bajar monos, los cazadores Shuar serían capaces de bajarlos sin fallar tanto y perder tantas flechas.

Este mito muestra como en la memoria colectiva de la cultura Shuar, se mantiene intacta la forma de contar, comenzando por la mano izquierda y doblando el dedo meñique, anular, medio, índice y anular en el proceso de cuantificar en este caso el número de flechas.

Sistema de numeración gestual

Tylor (2017) respecto a la numeración en sociedades de tradición oral, en el capítulo sobre “el arte de contar”, señala:

Los hombres contaban con sus dedos antes de encontrar palabras para los números que expresaban, [...] en esta categoría de cultura, el lenguaje de palabras no solamente apareció después del lenguaje de gestos, sino que en realidad provino de éste (p. 80).

Los ancianos del pueblo Shuar, sujetos de este estudio, pueden contar hasta veinte sin existir nombre alguno para los números. El lenguaje es en este caso un registro indirecto del concepto de cantidad del número, sin ser un espejo de las representaciones cognitivas, superándose de esta manera la creencia de que el lenguaje es un indicador capaz de relevar el grado de los hablantes, con respecto a su estructura numérica, tan común en los estudios antropológicos y lingüísticos sobre este tema particular.

Al observar la forma en la que cuentan los ancianos del pueblo Shuar, logramos a través de la construcción de una “oposición simétrica” determinar como en la numeración utilizan de manera simultánea, diferencial y secuencial las palabras con los dedos de manos y pies.

Los ancianos en su contexto cuando proceden a contar, toman los dedos como objeto de referencia o indicador con cualidades de significante utilizando la palabra: “ju” (este) para señalar a las personas, animales y objetos que están cerca y “au” (ese) para las que están lejos.

En el sistema numérico Shuar original, se puede contar hasta veinte, lo hacen con dedos de manos y pies, “[...] la existencia de la destreza de contar podría ser posible sin nombres para los números [...] es un error imaginar que la mente humana represente números para poder contar” (Yánez, 2009, p. 80).

Para contar diez gallos que están cerca, en Shuar "ayum" lo hacen de la siguiente manera:

Se comienza a numerar del 1 al 5 con la mano izquierda y por el dedo meñique. Cada vez que se cuenta una unidad se dobla el dedo correspondiente con la mano derecha. Cuando se llega al dedo pulgar que corresponde al cinco se cierra totalmente la mano y moviéndola hacia adelante y hacia atrás se dice "este -objeto/animal- que termina la mano", como se puede ver en la tabla 2.

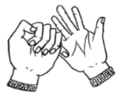
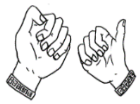
Para continuar el conteo de unidad en unidad, hasta llegar al diez, estratégicamente se mantiene cerrada la mano izquierda como señalando que ya existe una vez cinco, y con esta se van bajando los dedos de la mano derecha, comenzando por el meñique. Cuando se llega al dedo pulgar que corresponde al diez, se cierran totalmente las manos y moviéndolas de arriba hacia abajo, se dice "este-objeto/animal- que termina las dos manos", como se puede ver en la tabla 3.

Tabla 2. Proceso gestual para contar números del 1 al 5

Frecuencia de uso	Utilización de manos	Palabra utilizada	Aproximación al español
1		"ju ayum"	este gallo
2		"ju ayum"	este gallo
3		"ju ayum"	este gallo
4		"ju ayum"	este gallo
5		"ju ayum" ewejen amua	este gallo que termina la mano

Fuente. Elaboración propia

Tabla 3. Proceso gestual para contar números del 6 al 10

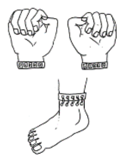
Frecuencia de uso	Utilización de manos	Palabra utilizada	Aproximación al español
6		"ju ayum"	este gallo
7		"ju ayum"	este gallo
8		"ju ayum"	este gallo
9		"ju ayum"	este gallo

10		"ju ayum" jimiara ewejen amukai	este gallo que termina las dos manos

Fuente. Elaboración propia

- Para continuar el conteo y llegar al número quince, se utilizan los dedos del pie izquierdo, se mantienen las dos manos unidas y con el dedo índice de la mano izquierda se van señalando los dedos, comenzando por el dedo meñique del pie izquierdo, como se puede ver en la tabla 4.

Tabla 4. Proceso gestual para contar números del 11 al 15

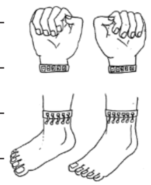
Frecuencia de uso	Palabra utilizada	Aproximación al español	
11	"ju ayum"	este gallo	
12	"ju ayum"	este gallo	
13	"ju ayum"	este gallo	
14	"ju ayum"	este gallo	
15	"ju ayum" ewejen, nawe amua	este gallo que termina el pie	

Fuente. Elaboración propia

Para continuar el conteo y llegar al número veinte se utilizan los dedos del pie derecho, se mantienen las dos manos unidas y con el dedo índice de la mano izquierda se van señalando los dedos, comenzando por el dedo meñique del pie derecho, como se puede ver en la tabla 5.

Tabla 5. Proceso gestual para contar números del 16 al 20

Frecuencia de uso	Palabra utilizada	Aproximación al español
16	"ju ayum"	este gallo
17	"ju ayum"	este gallo
18	"ju ayum"	este gallo
19	"ju ayum"	este gallo
20	"ju ayum" jimiara ewejen, nawe iraku	este gallo que termina las dos manos y los dos pies



Fuente. Elaboración propia

Cuando un Shuar quiere decir que existen cinco objetos, cierra la mano izquierda totalmente y las mueve de adelante hacia atrás de manera repetida. Si quiere decir que existen diez objetos junta las dos manos cerradas y las mueve de adelante hacia atrás de manera repetida. Lo mismo sucede con el quince y con el veinte.

El movimiento de las manos y la utilización de los pies, juegan un papel relevante en la comunicación, están claramente asociados a la cantidad, siendo la expresión gestual la que determina la noción de cantidad, Tylor (2017) denomina a este proceso como un método más primitivo de expresión, la comunicación no se determina por la capacidad para hablar, sino por el lenguaje de los gestos.

Nos encontramos frente a una estructura mental, que no representa los números verbalmente para poder contar, como sucede en la tradición occidental, más bien se representa la cantidad simbolizada en los dedos como un mecanismo para poder contar. Por tanto, pensar que se puede analizar la expresión de números y cantidades por su expresión verbal es un serio problema, si consideramos que el uso de las manos y de otras partes del cuerpo está asociado a la cantidad, "(...) en muchos casos, el movimiento del cuerpo y el movimiento de las manos juegan un papel en la comunicación que es mucho más relevante de lo que generalmente se reconoce" (Covaz, 1987, P.34).

En el caso que nos ocupa encontramos un metalenguaje, en donde el sistema de numeración verbal se complementa con un amplio uso de gestos de manos y pies, de manera sistemática y ritual, situación característica no solo en los pueblos de tradición oral. Como nos muestra el psicolingüista McNeill al realizar estudios sobre el uso de la gestualidad por parte de matemáticos, encontró que es relevante la utilización de gestos en cualquier discusión sobre un teorema o ecuación. Concluyendo que el uso de gestos está siempre presente en la comunicación contextual y de temas muy abstractos (citado en Yánez, 2001, p.27).

Registro simbólico de cantidades más allá de veinte

Cada vez que un Shuar cuenta veinte con dedos de manos y pies coloca una piedra, la misma que sirve como registro simbólico. Esto le permite recordar las veces que ha contado veinte en una situación cotidiana, así, si tiene dos piedras significa que ha contado cuarenta, si tiene tres piedras y cuatro dedos doblados de la mano izquierda ha contado sesenta y cuatro.

Nos encontramos frente a un sistema numérico en donde la tendencia de los hablantes es subordinar las diferencias de cantidad a alguna característica física, en este caso la "frecuencia de uso" está subordinado a la cantidad que determinan los dedos que se señalan y las piedras que se colocan. De esta manera en la cultura Shuar se expresa el concepto de número, asociándolo de manera irrenunciable a categorías sensibles a la percepción de los hablantes, en donde el número como tal, es una propiedad dependiente de objetos concretos, en este caso dedos y piedras.

A diferencia de la numeración occidental, en donde el número como tal es una propiedad independiente que ha perdido la referencia de los conceptos originales en relación a objetos que pueden haber constituido sus raíces. Palmer a través de un análisis comparativo de las lenguas proto-indo-europeo, latín y castellano encuentra el origen de los números castellanos en relación con objetos concretos como paso indispensable a la abstracción (citado en Covaz, 1987, p. 56).

Sistema de numeración vigesimal

Después del veinte, el Shuar no tiene ningún número más, pero puede contar hasta donde quiera, señalando la existencia de veinte moviendo las manos una vez en dirección a los pies o colocando una piedra en el suelo, esto recuerda que existe una vez veinte, repitiéndose el proceso de conteo con las manos desde uno. Si mueven las manos dos veces o existen dos piedras en el suelo, recuerda esto, que existen dos veces veinte y así sucesivamente.

Podemos evidenciar que la comunicación gestual cumple un papel importante en la numeración de cantidades mayores, las mismas que son fácilmente reconocidas, como señala Covaz (1987) "…no es de suponer, que porque una tribu no tenga palabras actuales para los numero mayores de 3 o 5 por ende no puedan contar más allá de esto. Parece que pueden contar, y si lo hacen mucho más allá, pero es por medio de recurrir a un método más primitivo de expresión que el habla, el lenguaje de los gestos" (p. 16).

Desde el punto de vista etnográfico, en un sistema de numeración existe la "base" y el "módulo", Ghinassi sugiere que la "base" se determina por la cantidad máxima de unidades que se puede contar y el "módulo" por la cantidad máxima de objetos que se puede contar al combinar las unidades, en el caso que nos ocupa dedos de manos y pies (citado en Covaz, 1987, p. 85). Etnográficamente el sistema numérico Shuar tiene una base de 20 y un módulo infinito, es decir la máxima cantidad de unidades que se puede contar es 20 y el máximo número de objetos que se puede contar combinando las unidades y las piedras es infinito. El sistema numérico Shuar es un sistema vigesimal, basado en los dedos que posee el hombre en sus manos y pies.

Evolución del sistema de numeración Shuar

A diferencia de los datos obtenidos en esta investigación, Karsten (2020) afirma que los Shuar pueden contar hasta veinte, teniendo nombres propios para los cinco primeros números. Para contar se apoyan con las manos comenzando con la izquierda por el dedo meñique, luego continúan con los de la derecha, cuando terminan con las dos manos, proceden de manera similar con los dedos de los pies, significa esto que el mayor número que se puede expresar es veinte.

Es interesante notar en la descripción que hace Karsten el uso de un metalenguaje, más allá de las palabras Se puede expresar 10, juntando las dos manos cerradas y sin usar ninguna expresión verbal cuando es necesario expresar 20, 30, 40 se lo hace juntando las manos cerradas y pies dos, tres o cuatro veces. En la estructura mental de los Shuar se expresa el número abstracto, a través de señas o referentes concretos como los dedos, a pesar de que existe una palabra que expresa cada número en particular. Se puede inferir que los rudimentos utilizados por la cultura shuar para identificar los números nos colocan frente a un sistema de pensamiento concreto.

Ghinassi un misionero que pasó mucho tiempo entre los Shuar, afirma que su sistema de numérico es vigesimal "después de veinte, el Shuar no tiene ningún número más, pero puede contar hasta donde quiera, repitiendo con las manos cerradas el valor para -diez- y agregando con los dedos las unidades que necesita" (citado en Yánez, 2001, p. 44). El hecho de que existan palabras propias para los números del 1 al 5, no significa que no puedan contar más allá de esto, lo hacen con un método diferente a la expresión verbal, la expresión gestual.

Encontramos aquí una forma diferente de numeración y cuantificación basada en un sistema vigesimal en donde la comunicación gestual es el centro de la expresión, sin ser esto una limitante para expresar cantidades mayores. Según Karsten, en lengua Shuar existen nombres para los cinco primeros números, los mismos que los analizamos etimológicamente, como se puede ver en la tabla 6.

Tabla 6. Nombres de los números según Karsten

Frecuencia de uso	Nombre
1	Cikicik
2	Hímyar
3	Manáintyu
4	áintyuk áintyuk
5	ewéh amus

Fuente. Elaboración propia

Al realizar el análisis etimológico de los nombres para los 5 primeros números en lengua shuar a través de pares mínimos de morfemas, encontramos:

Para Cikicik (1), es difícil encontrar un morfema significativo que nos ayude a rastrear su etimología, sin embargo, se encuentran los siguientes morfemas de los que posiblemente se podrían derivar: isicik que significa un poco, cikic que significa otro, cykyá-s- que significa quedarse solo.

Hímyar (2), encuentra su raíz en el morfema himyámpramu que significa gemelo.

Para Manáintyu (3), encontramos morfemas como ména que significa izquierda, menánt que significa quedarse a un lado, lo que lleva a elaborar una conjetura etimológica que sugiere para manáintyu como impar, basándose en la presunción de que estos morfemas sugieren que algo no está en el centro.

Áintyuk áintyuk (4), encuentra su raíz en los morfemas áinik, aíniu, ániu que significan par, ain-kia que significa hacer lo mismo y aint-ra que significa ir juntos.

Ewéh amus (5), significa en lengua Shuar la mano está completa. Podemos observar aquí una oración descriptiva para nominar este número.

Neologismos

Encontramos en el sistema numérico Shuar, que utilizan los niños actualmente en la escuela, neologismos, es decir que se han creado nombres para los números, que se representan de manera gestual. Para los números después del “6”, Pellizarro (1965) sugiere la utilización del término íraku que significa sumar, en este caso al 5, como se puede ver en la tabla 7.

Tabla 7. Neologismos del 6 al 10

Frecuencia de uso	Neologismo	Significado
6	cikicik íraku	5+1
7	hímyar íraku	5+2
8	manáintyu íraku	5+3
9	áintyuk áintyuk íraku	5+4
10	ewéh amus íraku	5+5

Fuente. Elaboración propia

Para los números después del 10, Pellizarro sugiere la utilización del término nawén que significa pie (10), acompañado del término íraku, después del número que significa sumar, como se puede ver en la tabla 8.

Tabla 8. Neologismos del 6 al 10

Frecuencia de uso	Neologismo	Significado
11	cikicik nawén íraku	1+10
12	hímyar nawén íraku	2+10
13	manáintyu nawén íraku	3+10
14	áintyuk áintyuj nawén íraku	4+10
15	ewéh amus nawén íraku	5+10

Fuente. Elaboración propia

Sistema de numeración adaptado

El sistema de numeración Shuar que se utiliza actualmente en los procesos escolares, mantiene los nombres propios para los cinco primeros números como lo señala Karsten, como se puede ver en la tabla 9.

Tabla 9. Sistema de numeración adaptado del 1 al 5

Frecuencia de uso	Término
1	Chikichik
2	Jímiar
3	jimiara patatkarí (menaint)
4	áintiuk, áintiuk
5	ewejen ámuku

Fuente. Elaboración propia

El sistema de numeración Shuar con cinco nombres propios y de base vigesimal se ve obligado por influencia de la escolarización, a adaptarse al sistema decimal occidental, creando términos que permitan concretar esto, transformándolo automáticamente en decimal, como se puede ver en la tabla 10.

Tabla 10. Sistema de numeración adaptado del 6 al 1000

Frecuencia de uso	Término	Referencia etimológica
6	Ujuk	Rabo
7	Tsenkent	Gancho
8	Yarush	Añango
9	Usumtai	el dedo para pintarse
0	Atsá	Nada
10	nawe	Pie
100	washim	Barbacoa
1000	nupanti	Grueso
1.000.000	amúchat	Infinito

Fuente. Elaboración propia

Esta creación de términos corresponde a las formas de los objetos que se encuentran en la naturaleza, objetos que se parecen a la forma escrita o a la cantidad que representan los números, así para 6 rabo, 7 gancho, 8 hormiga, 9 el dedo para pintarse, 0 nada, 10 pie, 100 barbacoa, 1.000 grueso y 1.000.000 infinito.

El número 9 se relaciona con el dedo para pintarse la cara, porque antes se contaba doblando los dedos Se comenzaba por los dedos de la mano izquierda (5) y luego por los de la derecha comenzando por el meñique, de manera que el cuarto dedo de la segunda mano es el índice (+4), y a este se le conocía como ipyáksuntai Ipyák significa pintar con el pigmento, su forma relacionada (u)sumtai se le conoce como nueve.

Préstamos de otras lenguas

En esta adaptación del sistema numérico vigesimal Shuar a un sistema decimal, se toma prestada la estructura kichwa para formar los números del 10 al 19. En Kichwa los números del 11 al 19 se forman utilizando el término chunka que significa diez o decena para sumar a los números del 1 al 9 como se muestra en la tabla que a continuación se presenta, como se puede ver en la tabla 11.

Tabla 11. Escritura en Kichwa de los números del 11 al 19

Frecuencia de uso	Término Kichwa	Estructura de formación
11	chunka shuk	10 + 1
12	chunka ishkai	10 + 2
13	chunka kimsa	10 + 3
14	chunka pusak	10 + 4
15	chunka pichka	10 + 5
16	chunka sukta	10 + 6
17	chunka kanchis	10 + 7
18	chunka pusak	10 + 8
19	chunka iskun	10 + 9

Fuente. Elaboración propia

Para formar números del 10 al 19 en lengua Shuar, encontramos un préstamo de la estructura de composición kichwa, es decir sumar al número 10, los números del 1 al 9, como se muestra en la tabla que a continuación se presenta, como se puede ver en la tabla 12.

Tabla 12. Prestamos del Kichwa para los números del 11 al 19

Frecuencia de uso	Término	Estructura de formación
11	nawe chikichik	10 + 1
12	nawe jimiar	10 + 2
13	nawe menaint	10 + 3
14	nawe áintiuk, áintiuk	10 + 4
16	nawe ujuk	10 + 6
17	nawe tsenkent	10 + 7
18	nawe yarush	10 + 8
19	nawe usumtai	10 + 9
20	jimiara nawe	2 x 10
21	jimiara nawe chikichik	2 x 10 + 1
22	jimiara nawe jimiar	2 x 10 +2

Fuente. Elaboración propia

Se puede evidenciar por lo expuesto, que el sistema de numeración Shuar actual, es el resultado histórico del contacto con otros sistemas de bases y estructuras distintas, en este caso el Occidental y el Kichwa.

Análisis de los resultados

El análisis de los hallazgos de este estudio se orienta a los procesos de numeración y cálculo presentes en las formas de contar objetos; a la concepción del espacio en el sistema numérico, en la casa, en el tiempo y en las narrativas míticas, mostrando como el espacio y el tiempo ordenan los sistemas de pensamiento, las relaciones sociales, los valores y las creencias de la cultura Shuar.

Numeración y cálculo

Es importante distinguir numeración y cálculo, en este sentido cabe preguntar si la capacidad de contar puede existir independientemente de la de calcular. En el caso del sistema numérico occidental, podríamos sostener que este puede existir independientemente de la capacidad para calcular, en el sistema numérico Shuar hay una relación de interacción entre numeración y cálculo.

El uso de los dedos de las manos y de los pies, es un sistema en donde la suma del tipo 1, 1+1, 1+1+1, etc., está presente, el número límite es 1 y el máximo 20. Esto coloca a los sistemas de numeración y cálculo Shuar, en un espacio de la comprensión racional que separa a estos sistemas de la norma semántica propia de las lenguas; el significante con su significado. Es decir, existe una arbitrariedad en el signo lingüístico de la numeración, en donde la correspondencia entre significante y significado está limitada al control racional de los hablantes, relacionando la cantidad de dedos doblados con un proceso de suma que evidencian la noción de número.
La numeración y cálculo están presentes en el sistema numérico Shuar, si analizamos sus reglas de composición, encontramos que en el proceso de contar los números del 1 al 5, se forman a través de la suma de unidades, dedos doblados de la mano izquierda, hasta llegar al cinco, como se puede ver en la tabla 13.

Tabla 13. Proceso de suma en los números del 1 al 5

Frecuencia de uso	Proceso de suma
1	1
2	1+1
3	1+1+1
4	1+1+1+1

5	1+1+1+1+1

Fuente. Elaboración propia

Los números del 6 al 10 se forman a través de un sistema en el que se suma al número 5, dedos de la mano izquierda, los números del 1 al 5, dedos de la mano derecha, como se puede ver en la tabla 14.

Tabla 14. Proceso de suma en los números del 6 al 10

Frecuencia de uso	Proceso de suma
6	5+1
7	5+1+1
8	5+1+1+1
9	5+1+1+1+1
10	5+1+1+1+1+1

Fuente. Elaboración propia

La formación de números del 11 al 15 está dada por un proceso de sumar al diez (manos que ya existen) los números del 1 al 5 (dedos de los pies), como se puede ver en la tabla 15.

Tabla 15. Proceso de suma en los números del 11 al 15

Frecuencia de uso	Proceso de suma
11	10+1
12	10+1+1
13	10+1+1+1
14	10+1+1+1+1
15	10+1+1+1+1+1

Fuente. Elaboración propia

La formación de los números del 16 al 20, está dada por un proceso de sumar al quince (manos y un pie que ya existe) los números del 1 al 5 (dedos del otro pie), como se puede ver en la tabla 16.

Tabla 16. Proceso de suma en los números del 16 al 20

Frecuencia de uso	Proceso de suma
16	15+1
17	15+1+1
18	15+1+1+1
19	15+1+1+1+1
20	15+1+1+1+1+1

Fuente. Elaboración propia

Nos encontramos ante un sistema en el que la capacidad de contar es dependiente a la de calcular, este procedimiento esta como fosilizado en el sistema gestual, en donde el proceso es sumar. En este contexto se asocia "la numeración con una notación gráfica y en segundo lugar a construir, basándose en esta notación, un edificio teórico destinado particularmente a la previsión de acontecimientos o al cálculo de dimensiones y efectos considerados útiles por parte de cierto grupo social, el cual en parte se fortalece justamente por efecto de su propia capacidad de elaborar o recibir de otros, tales sistemas de previsión y cálculo." (Covaz, 1987, p. 53).

Concepción del espacio en el sistema de numeración shuar

Al analizar la concepción del espacio, en la forma que los Shuar cuentan los números, utilizando los dedos de las manos encontramos una progresión lineal bidireccional, (Figura 11).

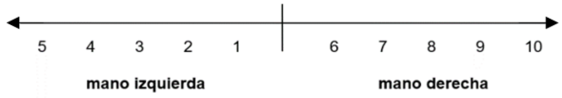


Figura 11. Concepción del espacio en los números del 1 al 10

Fuente. Elaboración propia

Al analizar la concepción del espacio en la forma de contar los números utilizando los dedos de los pies, encontramos una secuencia lineal unidireccional, (Figura 12).

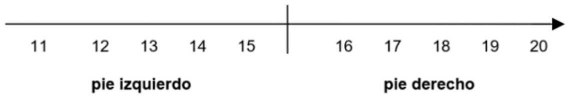


Figura 12. Concepción del espacio en los números del 11 al 20

Fuente. Elaboración propia

Con relación al conteo en manos y pies, cuando se quiere contar cantidades que van más allá de veinte, encontramos una secuencia vertical y horizontal bidireccional, que va de arriba a abajo y viceversa. Esto lo evidenciamos en la descripción numérica de 10 en adelante, (Figura 13).

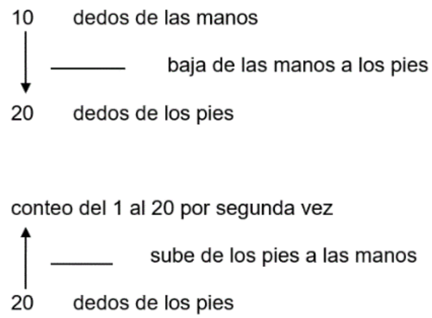


Figura 13. Concepción del espacio en los números del 10 al 20

Fuente. Elaboración propia

La concepción del espacio en la casa tradicional

La casa tradicional Shuar es de forma elíptica y tienen una longitud de 15 a 20 metros y un ancho de 8 a 10 metros. Tiene siempre dos puertas, una a cada tope de la casa, la una es usada por los hombres y la otra por las mujeres. La casa tiene dos departamentos, uno destinado al uso de mujeres y niños que se llama “ekínturu”, el otro para los hombres y visitantes que se llama “tangamasha”.

El manejo del espacio lineal bidireccional, lo encontramos también en la distribución espacial de la casa. El lado norte (derecho) pertenece al hombre y el lado sur (izquierdo) pertenece a la mujer, cada lado tiene su correspondiente puerta de entrada y salida, (Figura 14).

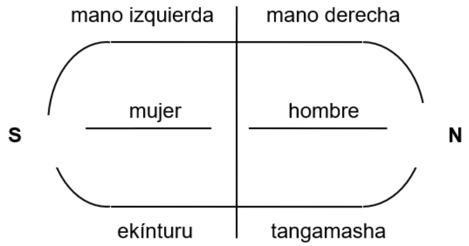


Figura 14. Concepción del espacio en la casa tradicional

Fuente. Elaboración propia

Cosmogonía y concepción del espacio

Para los Shuar la tierra es una inmensa isla, en la cual viven los hombres en continuas dificultades y guerras, molestados por los antepasados, llamados “iwianchi”, que buscan placer terrenal ya que no pueden ir al cielo. El cielo es una inmensa planicie fértil, habitada por los Dioses y los hombres que gozan de todo bien. Un mito Shuar dice que antes había comunicación entre el cielo y la tierra y todos los hombres podían disfrutar de la felicidad del cielo, porque podían ascender a través de un bejuco que desde las plantas del cielo colgaban hasta la tierra, (Figura 15).

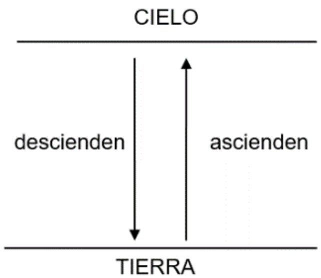


Figura 15. Cosmogonía y concepción del espacio

Fuente. Elaboración propia

Esta concepción cosmogónica, concuerda con la secuencia vertical bidireccional del conteo de los números del veinte en adelante, de arriba hacia abajo, y de abajo hacia arriba, el manejo del espacio y el tiempo se muestran de manera fosilizada en las narrativas míticas de la cultura Shuar.

Mitología y concepción del espacio tiempo

Según la tradición Shuar, el manejo del espacio y tiempo, se origina en la narrativa de dos personajes llamados Yurank o Uwi y Naitiak, que vivían en un lugar infinito, llamado tierra desconocida, eran andantes y llegaban cada uno en su tiempo correspondiente, estos eran rivales y confrontaban permanentemente, en razón de que el uno traía abundancia, y el otro carestía y sufrimiento. Cuando Yurank o Uwi, llegaba traía bienes para el consumo humano, pasaba ocho meses junto al pueblo enseñándoles plegarías, técnicas para la caza y la guerra, al terminar sus labores de ayuda a los hombres, retornaba a su lugar infinito, encontrándose en el camino a naitiak, quien llevaba frutos tiernos no aptos para el consumo y muchas lluvias para sustituirlos por los bienes que Yurank o Uwi había proporcionado al pueblo, se entablaba el siguiente diálogo entre estos personajes:

Uwi (yurank): ¿dónde vas?,
Naitiak: voy llevando alimentos a mis queridos hijos y nietos,
Uwi (yurank) replicaba, ¡pero si esos frutos nos son aptos para el consumo! ¿cómo vas a sobrevivir a la gente? Es mejor que regreses, yo he dejado alimento suficiente, no necesitan tu presencia, no creo que vayas a dar alimento a la gente, si tú eres egoísta.
Naitiak: no solo tu presencia es necesaria.

Así pasaban discutiendo mucho tiempo hasta que Naitiak continuaba su camino hacia el pueblo Shuar, llevando hambre, sufrimiento y muerte. Se tiene la creencia de que cuando una mujer trae un niño en tiempo de uwi (yurank), este será feliz y tendrá suerte en su vida, en cambio sí nace en naitiak será todo lo contrario. En la actualidad al período escolar se los conoce como uwi (yurank) y al periodo de vacaciones como naitiak (nurant).

Encontramos en el mito de uwi y naitiak como la concepción del espacio lineal bidireccional Está presente en la descripción evidente del espacio y tácita del tiempo en el encuentro de estos personajes. Uwi y naitiak se encuentran conversan y continúan con su camino, según Saussure existiría en esta narrativa una relación sintagmática, "entre más se utilice una palabra, más relaciones sintagmáticas habrá tenido y más sentidos podrá transmitir, pues se opone a más términos asociados" (Quijano, 2016, p. 173).

Concepción del tiempo en la cultura shuar

Al preguntar a los ancianos sujetos de este estudio cuales son los tiempos que existen en la cultura Shuar, responden utilizando la palabra acompañada de un gesto, Nurant moviendo la mano izquierda de arriba hacia abajo y Yurant moviendo la mano derecha de arriba hacia bajo. Las actividades rituales, culturales, sociales y productivas de la cultura Shuar se organizan en torno a la existen dos tiempos:
El yurank, tiempo de cosechas y buenos frutos, dura ocho meses y va desde octubre a mayo.
El nurant, tiempo de escasez o de sembrar, dura cuatro meses y va desde junio a septiembre.

Estos tiempos concuerdan con la secuencia lineal bidireccional del espacio identificado en la progresión numérica con la disposición gestual del uso de las manos, el nurant corresponde a la mano izquierda y el yurank corresponde a la mano derecha, (Figura 16).

Figura 16. Concepción del tiempo en la cultura Shuar

Fuente. Elaboración propia

El uwi (yurank) es el tiempo en el que los pájaros del monte trinan y ponen sus huevos y los animales dan sus crías, estas manifestaciones naturales permiten a los Shuar planificar las actividades de siembra de yuca y plátano, estos cultivos atraían animales, que eran cazados por los Shuar para su dieta diaria. Por la abundancia que este tiempo representa, era aprovechado por los mayores para realizar celebraciones, como: de la chonta, rituales de la cascada y viajes de cacería.
El naitiák (nurant), es el tiempo de los frutos tiernos y de lluvias, por lo que se dificulta la agricultura, la cacería y la celebración de fiestas o rituales, tiempo difícil, especialmente para quienes no han sido precavidos, recolectando y guardando alimentos y provisiones.

Cálculo de las partes del día

Los Shuar llaman a los días Kashik, dividen al día en tres partes: Etsa kashik a la mañana, Tutupin al medio día y Etsa pukun akámú a la tarde. Las partes del día se pueden determinar por la sombra que el Sol produce. Para el cálculo de las partes del día, observaban la sombra que el Sol producía en el cuerpo, árboles o casas. Si la sombra se refleja al lado derecho es de mañana, si la sombra proyectaba imágenes diminutas es el medio día y si la sombra se reflejaba al lado izquierdo es la tarde, (Figura 17).

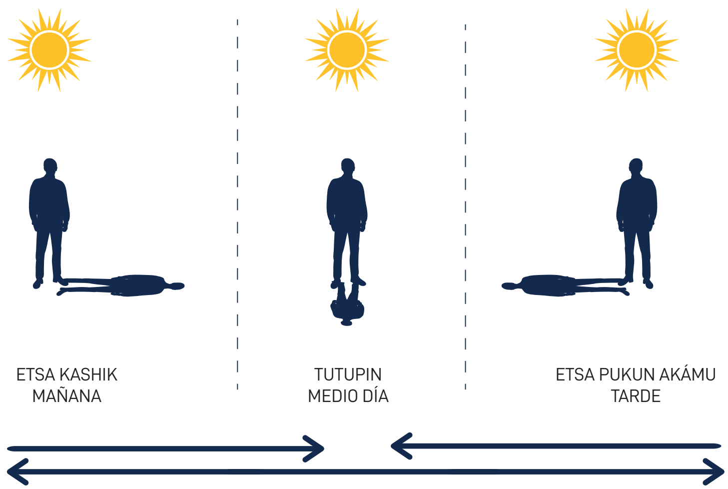


Figura 17. Cálculo de las partes del día

Fuente. Elaboración propia

Encontramos en esta sui generis forma de identificar las partes del día, que el espacio lineal bidireccional está presente en la sombra que el Sol proyecta en la selva amazónica, similar al fenómeno sucede en la región andina, la sombra que el Sol proyecta forma un círculo.

Registro nemotécnico del tiempo

Cuando un hombre salía de cacería por varios días, tenían un sistema nemotécnico de registro, marcaba en una viga rayas que representaban el número de días que se ausentaba, las esposas tachaban día a día las rayas. De esta manera a su regreso las mujeres podían preparar comida y bebida para el hombre, el día exacto de su regreso. En cambio, sí un hombre salía por varios meses, las mujeres marcaban una pequeña señal en la uña del dedo pulgar, cada vez que el ciclo de la luna, marcaba cuarto menguante.

Imagen cosmológica de la concepción del espacio tiempo

La imagen cosmológica de la concepción del espacio tiempo, nos muestra la forma lógica en la que se expresan los conceptos de orden, número y tiempo, en concordancia con la concepción del espacio y, que organiza la vida natural y espiritual de la cultura Shuar.

La cosmología en este caso, comprende el conjunto de concepciones que estructuran el orden del sistema constituidas en una unidad lógica en la cual se evidencia el arquetipo simbólico de la conexión cielo-tierra, hombre-mujer, abundancia-escasez y los aspectos ideológicos del pensamiento de esta cultura, (Figura 18).

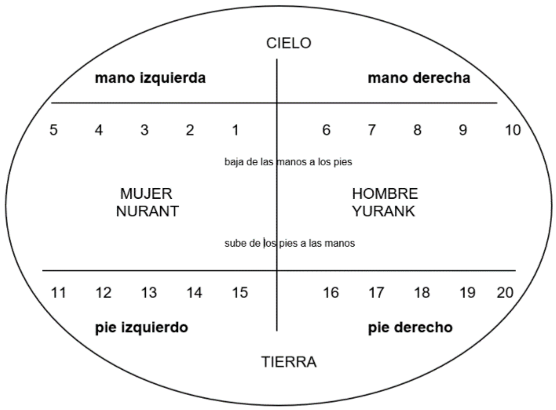


Figura 18. Cosmología del espacio tiempo

Fuente. Elaboración propia

A partir del principio de analogías simbólicas en sus diferentes planos y polaridades de correspondencia, encontramos que este discurso visual ordena el sistema numérico y el manejo del tiempo basado en la dualidad de los seres hombre-mujer y de los que habitan el mundo de arriba y abajo En la explicación de esta tradición compartida existe un conocimiento común al grupo cultural que lo coloca en un lenguaje que trasciende las limitaciones de lo verbal.

Capital simbólico

En este caso se entiende por capital simbólico a la manera como la matemática Shuar presenta leyes y propiedades de totalidad; en tanto que sistema es la característica de contar con los dedos de manos y pies forman parte de la estructura mental del pensamiento matemático. En este último, la formación de cantidades tiene un proceso implícito de suma que se evidencia en el proceso de contar de manera lineal bidireccional.

En la estructura de pensamiento Shuar, los procesos de clasificación, seriación, inversión y reciprocidad se expresan de manera lineal bidireccional, esto determina que la reversibilidad, base de la lógica, exprese las clases y relaciones de manera pragmática a través de gestos, que permiten la conservación de cantidad a través del número de dedos que se tienen doblados en la mano, a diferencia de occidente en donde la conservación de cantidad se entiende a través de signos y las proposiciones que la componen se expresan de manera teorética.

La evidencia de un capital simbólico en la matemática Shuar nos permite incorporar los procesos de la lógica lineal bidireccional en procesos de aprendizaje, legitimando este corpus epistemológico al plantear categorías que permiten desarrollar otras propuestas pedagógicas y didácticas en las aulas, donde hasta el momento son deslegitimadas o invisibilizadas.

Estructura lógica del pensamiento matemático Shuar

En el caso que nos ocupa, la estructura lógica matemática de los Shuar, se caracteriza por ser el resultado de operaciones concretas a través de los dedos de manos y pies de manera simétrica, convirtiéndose esta acción de contar con los dedos en una actividad ordenadora. En el sistema numérico Shuar, el orden de la serie está dado por el número de dedos que se aumenten, es decir el registro de orden de las cantidades, depende directamente de las acciones que se realicen y que la percepción pueda representar.

Berlyne sostiene que para aprender "es la acción la que determina el orden y no viceversa, en razón de que el orden objetivo se evidencia a través del orden inherente de las acciones mismas" (citado en Yánez, 2001, p.78). Es decir que, para aprender un orden hay que tener una actividad ordenadora. En esta estructura lógica matemática, las operaciones de los dedos no son solo acciones interiorizadas, en virtud de que estas pueden ser reversibles, sino que en coordinación forman estructuras de conjunto que en álgebra general se llaman agrupamientos), como se puede ver en la tabla 17.

Tabla 17. Estructura lógica del pensamiento Shuar

Operación de los dedos de la mano	Estructuras de conjunto
se dobla un dedo de la mano izquierda	1
se doblan dos dedos de la mano izquierda	1+1
se doblan tres dedos de la mano izquierda	1+1+1
se doblan cuatro dedos de la mano izquierda	1+1+1+1
se doblan cinco dedos de la mano izquierda	1+1+1+1+1

Fuente. Elaboración propia

Las estructuras que se muestran en los conjuntos evidencian que la conformación del número es de composición lógica; porque, la conservación de estos se basa en la adición. Cada vez que se aumentan los dedos se crea una nueva síntesis del número entero que corresponde, a una nueva composición serial que incorpora dos elementos: los dedos anteriores más el actual.

Estos agrupamientos o estructuras de conjunto, corresponden a actividades intelectuales, en donde, las proposiciones a manera de operaciones de clases y relaciones, se expresan a través de la clasificación, seriación, inversión y reciprocidad.

CLASIFICACIÓN: La clasificación implica inclusiones del tipo "A" incluye a "B y C" y "B" incluye a "C", como se puede ver en la tabla 18.

Tabla 18. Proceso de clasificación en el sistema numérico Shuar

CLASIFICACIÓN	EQUIVALENCIA	PROCESO DE INCLUSIÓN	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
C	1 dedo		
B	2 dedos	**B** incluye **C**	
A	3 dedos	**A** incluye **B**	

Fuente. Elaboración propia

En esta clasificación del sistema numérico Shuar, encontramos las siguientes operaciones:

Composición: C + C = B; B + C = A.
Inversión: A - C = B; B - C = C.
Identidad: A - A = 0; B - B = 0.
Asociatividad: A + (A + B) = B + (A + A)

SERIACIÓN: La seriación implica relaciones asimétricas transitivas, es decir, ordenaciones en serie, esto se expresa a través del siguiente orden: C, B, A, en donde las diferencias entre cada término y el inmediato superior es la adición de C, que en este caso corresponde a la unidad, como se puede ver en la tabla 19.

Tabla 19. Proceso de seriación en el sistema numerico Shuar

ORDEN	EQUIVALENCIA	RELACIÓN ASIMÉTRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
C	1 dedo	C	
B	2 dedos	C + C	
A	3 dedos	B + C	

Fuente. Elaboración propia

INVERSIÓN: La inversión consiste en la negación de una clase o inclusión, a través del producto y su inversa, es decir la clase se transforma en nula, como se puede ver en la tabla 20.

Tabla 20. Proceso de inversión en el sistema numerico Shuar

CLASE	EQUIVALENCIA	RELACIÓN INVERSA
C	1 dedo	C - C = 0
B	2 dedos	B - B = 0
A	3 dedos	A - A = 0

Fuente. Elaboración propia

RECIPROCIDAD: La reciprocidad consiste en eliminar una diferencia de la clase, es decir la clase se transforma en una relación de equivalencia, como se puede ver en la tabla 21.

Tabla 21. Proceso de reciprocidad en el sistema numerico Shuar

Clase	Equivalencia	Relación reciproca	Representación gráfica
C	1 dedo	C	
B	2 dedos	C + C	
A	3 dedos	B + C	

Fuente. Elaboración propia

La estructura lógica operatoria, a través de la clasificación, seriación, inversión y reciprocidad, expresan dos formas de reversibilidad: las de clase y las de relaciones, que permiten a la conservación de la cantidad, desarrollarse, debido a que la organización responde a leyes de totalidad.

Lógica operatoria y conservación de cantidad

La lógica se presenta siempre bajo la forma de estructura operatoria. En otras palabras, todo acto lógico es en esencia operar y por lo tanto actuar sobre las cosas. Una operación es en realidad una acción real que es susceptible de ser interiorizada y por lo tanto abstraída, esto significa que se convierte en reversible y por lo tanto puede ser coordinada con otras operaciones.

Un proceso es reversible cuando este se puede recrear de manera inversa, en operaciones matemáticas tenemos que el proceso inverso de la suma es la resta. Por otra parte, una operación nunca está aislada, es siempre parte de una estructura operatoria, las leyes de la reversibilidad son: la inversa; por ejemplo, si la operación es 1, su inversa es -1, la idéntica; por ejemplo 1-1=0, la asociativa; (1+1)-1=1+ (1-1).

Se puede inferir que la reversibilidad, en todas sus posibilidades, son la base del desarrollo de la noción de conservación en esta peculiar forma de manejar el espacio, analicemos las siguientes situaciones:

Situación 1: si pedimos a un hablante de la cultura Shuar que identifique la cantidad que representan dos manos izquierdas cerradas, los individuos dirán cinco, (Figura 19).

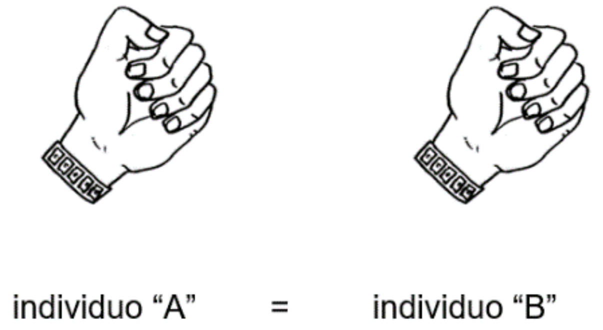


Figura 19. Situación 1 de la reversibilidad

Fuente. Elaboración propia

Situación 2: la representación de cinco, mano izquierda cerrada, si la compramos con cinco objetos, encontramos que no existe relación de tamaño ni forma, (Figura 20).

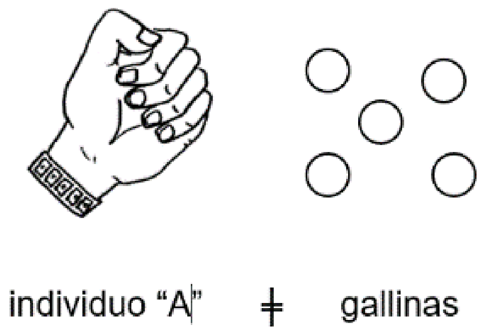


Figura 20. Situación 2 de la reversibilidad

Fuente. Elaboración propia

Cuando las estructuras operatorias concretas se desarrollan, se puede admitir que la cantidad se conserva, a pesar de que no tengan el mismo tamaño, esto implica que se desarrolle la posibilidad de que los dedos de la mano representen cantidades de objetos presentes en la cotidianeidad, es decir la reversibilidad, permite que la noción de conservación se desarrolle.

Un proceso cuya estructura denote ser el resultado de una operación concreta, requiere evidenciar que tiene su proceso inverso, la lógica no existe de manera aislada, siempre está ligada a inclusiones diferentes, que implican:

Clasificación del tipo A + A´= B, cuya inversa es B - A´ = A.
Seriación, que es una ordenación en sus dos posibilidades: $A<B<C$ y cuya inversa es $C>B>A$.
Una estructura lógica por lo expuesto debe permitir la conservación de la cantidad, como base de la abstracción que podrá ser enunciada verbalmente a través de proposiciones e hipótesis. Se puede inferir por lo expuesto que la lógica formal es el resultado de los diferentes procesos (utilización de dedos de manos y pies) en los que se construye la noción de conservación, que descansa bajo el principio de la reversibilidad y permiten la abstracción utilizando como referente el manejo del espacio lineal bidireccional.

Registro de cantidades

Realizamos el siguiente ejercicio con los ancianos sujetos de este estudio, les pedimos que contaran los huevos que tenía un recipiente, existían doce huevos. Contaron los huevos uno a uno con los dedos de las manos y pies. Al siguiente día y sin que se dieran cuenta, les quitamos tres huevos y les pedimos que los volvieran a contar, mostró primero la cantidad que tenía con manos y pies, para luego volverlos a contar, sorprendiéndonos que no coincidía la cantidad de huevos que existían, al compararla con los huevos que habían contado el día anterior.

En el caso que nos ocupa, el registro de cantidades en esta cultura, es el resultado de hacer una abstracción de las cualidades de cantidad que representan los dedos y los huevos, necesario para obtener la conservación de cantidad. Esta abstracción es posible gracias a la imagen de la cantidad de dedos con la cantidad de huevos en relación con su significado numérico, en donde interviene un factor de orden (seriación) para distinguir las cantidades. de lo contrario todas las unidades serían idénticas.

Esta abstracción de cualidades a través de la correspondencia de uno a uno, es cualificada, es decir, un elemento cualificado corresponde a otro elemento de diferente cualidad (dedos, huevos) en relación a que comparan unidades de diferente naturaleza. En esta forma de registrar cantidades el número entero no es un sistema de adición, ni de seriación, es una síntesis indisociable de la adición y seriación, como consecuencia de haber abstraído las cualidades de estos sistemas (adición y seriación) al compararlos con otros.

Noción de número en la lógica matemática shuar

La noción de número es un proceso mental resultado del desarrollo de los procesos correspondientes a los procesos de correspondencia de uno a uno y de conservación de la cantidad, que, en esencia, son procesos de clasificación y seriación, que sientan las bases para entender los procesos matemáticos.

Correspondencia de uno a uno

Al observar la forma simétrica en que los Shuar cuentan objetos asociándolos con los dedos de las manos o pies, nos muestran implícitos procesos concretos de correspondencia de uno a uno, por ejemplo, un dedo doblado corresponde a una silla, dos dedos doblados corresponden a dos sillas, tres dedos doblados corresponden a tres sillas, (Figura 21).

Figura 21. Correspondencia de uno a uno

Fuente. Elaboración propia

Conservación de cantidad

La conservación de cantidad consiste en mantener el número de objetos en el conjunto que forman, independientemente de la forma en que se coloquen u ordenen. Por ejemplo: en la línea "B", la cantidad de círculos ocupa más espacio que en la línea "A", sin embargo, la cantidad es dos, (Figura 22).

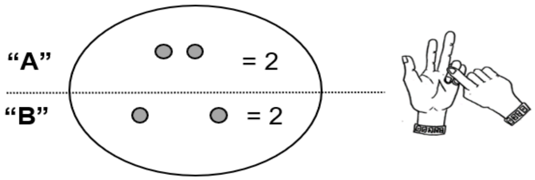


Figura 22. Conservación de cantidad

Fuente. Elaboración propia

El manejo de la conservación de cantidad y de la correspondencia de uno a uno, permiten el manejo de ideas más complejas como las medidas, los conjuntos infinitos y las variables de una ecuación como la "X" que llevan al pensamiento al plano hipotético deductivo.

Estructuras gráficas

Al aplicar pruebas elementales sobre agrupación de objetos, encontramos la tendencia a formar 2 grupos de cinco objetos con una secuencia lineal bidireccional, de la misma manera que lo hacen al contar con los dedos de las manos, (Figura 23).

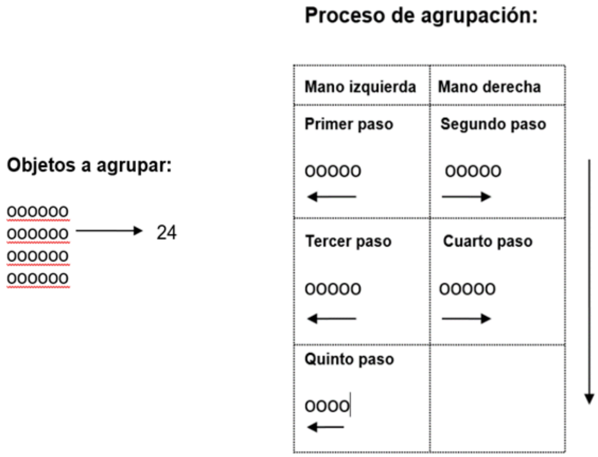


Figura 23. Estructuras gráficas

Fuente. Elaboración propia

Esta concepción lineal bidireccional, presente en el proceso de agrupación, determinan la seriación, clasificación y por lo tanto la correspondencia de uno a uno y conservación de cantidad, determinando la forma en la que se solución los problemas matemáticos.

Propuesta pedagógica

La pedagogía es una disciplina que estudia los métodos y las técnicas para generar procesos de aprendizaje adecuados y pertinentes, en este marco disciplinar, con base a los hallazgos, el análisis de los mismos y el capital simbólico descritos en este estudio, se diseñó un material didáctico que utiliza el espacio de manera lineal bidireccional, denominado ábaco Shuar. Permite esté, a través de la experimentación sensorio motriz y operatorio concreta, comprender la lógica matemática lineal bidireccional, característica específica del pensamiento matemático de la cultura Shuar, (Figura 24).

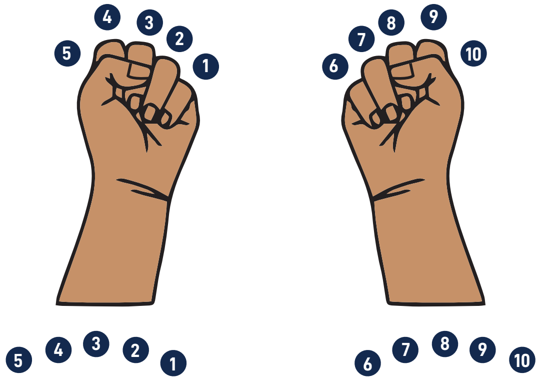


Figura 24. Ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Este recurso pedagógico es pertinente al sistema de pensamiento Shuar, debido a que permite registrar cantidades y realizar operaciones aritméticas básicas, desarrollando la comprensión de la noción de número, la correspondencia de uno a uno, la conservación de cantidad y los procesos intuitivos de la suma, resta, multiplicación y división, utilizando el espacio de manera lineal bidireccional.

Escritura de números

La escritura de los números responde al manejo del espacio lineal bidireccional, así, por ejemplo, si quiero escribir el número 1 en el ábaco Shuar, debo colocar un objeto en el dedo meñique de la mano izquierda que representa 1, (Figura 25).

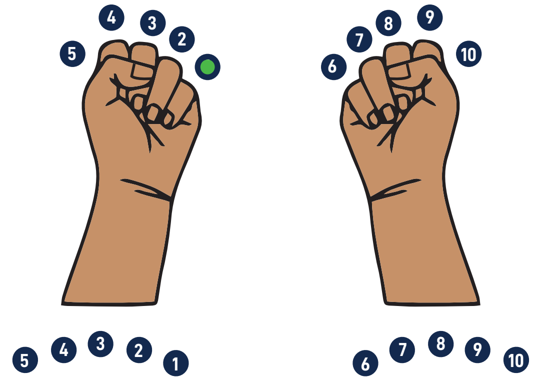


Figura 25. Escritura del número 1 en el ábaco Shuar
Fuente. Elaboración propia

Para escribir el número 7, debo colocar un objeto en el dedo índice de la mano derecha, que representa 7, (Figura 26).

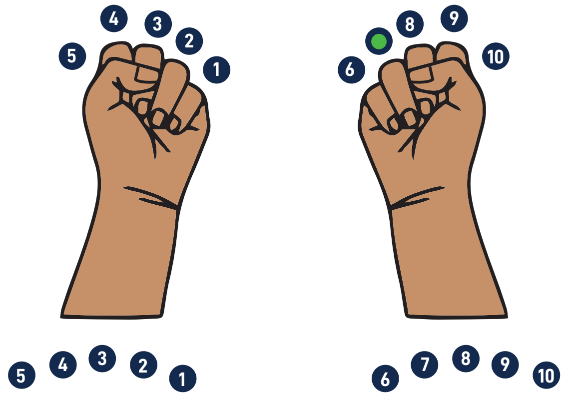


Figura 26. Escritura del número 7 en el ábaco Shuar
Fuente. Elaboración propia

Para escribir el número 10, debo colocar un objeto en el dedo pulgar de la mano derecha, que representa 10, (Figura 27)
.

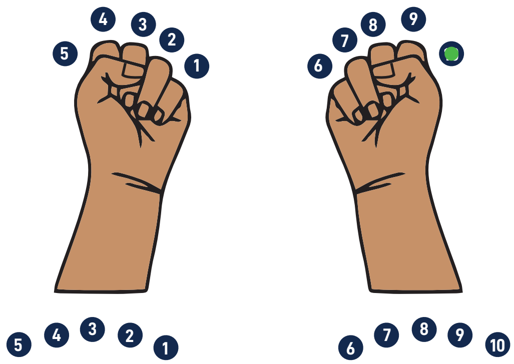


Figura 27. Escritura del número 10 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

SUMAS EN EL ÁBACO SHUAR

Para proceder a sumar en el ábaco Shuar, se utilizan los números de los dedos de las manos y de los pies para ubicar los sumandos. Si sumamos 4+3, procedemos de la siguiente manera:

Paso 1: Escribimos en los dedos de las manos el sumando 4 y en los dedos de los pies el sumando 3, (Figura 28).

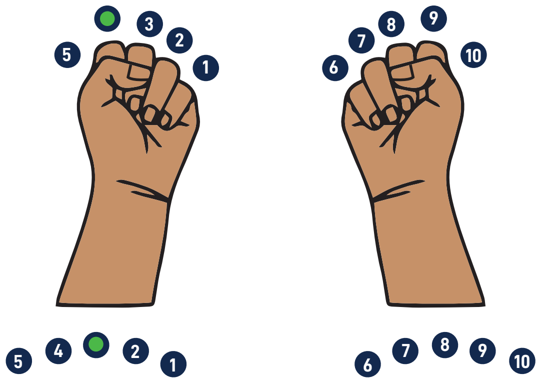


Figura 28. Paso 1 de la suma de 4+3 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Paso 2: El sumando 3 (parte inferior) retrocede 1 espacio y el sumando 4 (parte superior) aumenta un espacio, (Figura 29).

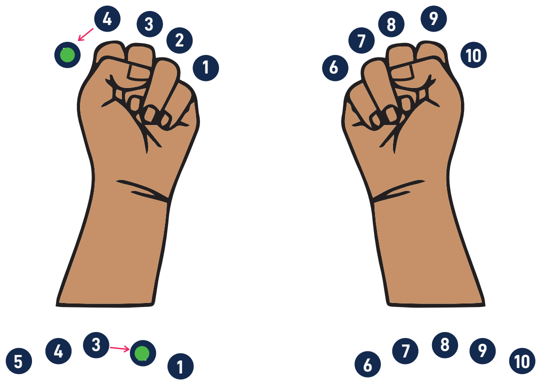


Figura 29. Paso 2 de la suma de 4+3 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Paso 3: El sumando 2 (parte inferior) retrocede 1 espacio y el sumando 5 (parte superior) aumenta un espacio, hacia el dedo meñique de la mano izquierda, (Figura 30).

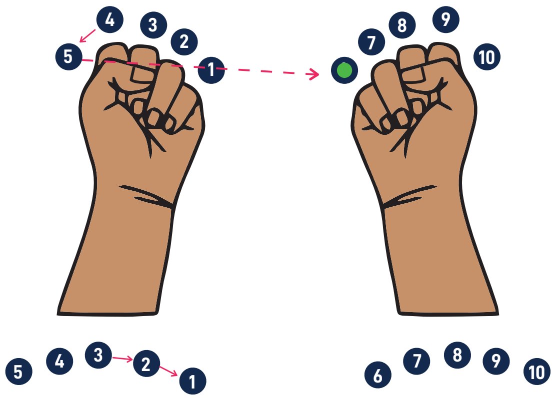


Figura 30. Paso 3 de la suma de 4+3 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Paso 4: El sumando 1 (parte inferior) retrocede 1 espacio y el sumando 6 (parte superior) aumenta un espacio, hacia el dedo anular de la mano izquierda, (Figura 31).

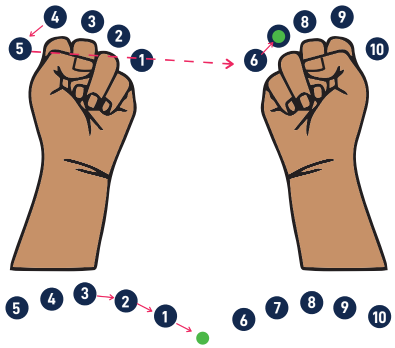


Figura 31. Paso 4 de la suma de 4+3 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

La respuesta, es el lugar donde queda ubicado el objeto, es decir el dedo anular de la mano izquierda, que representa el número 7 en la recta bidireccional Shuar.

RESTAS EN EL ÁBACO SHUAR

Para proceder a restar en el ábaco Shuar se utilizan los números de los dedos de las manos para ubicar el sustraendo y los dedos de los pies para ubicar el minuendo. Si restamos 5-2, procedemos de la siguiente manera:

Paso 1: Escribimos en los dedos de las manos el sustraendo (5) y en los dedos de los pies el minuendo (2), (Figura 32).

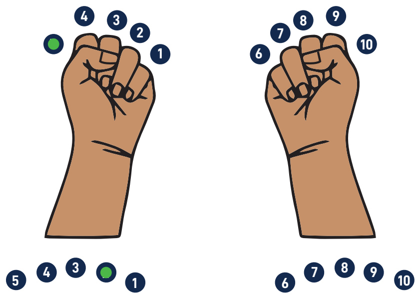


Figura 32. Paso 1 de la resta de 5-2 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Paso 2: El minuendo 2 (parte inferior) retrocede 1 espacio y el sustraendo 5 (parte superior) retrocede 1 espacio, (Figura 33).

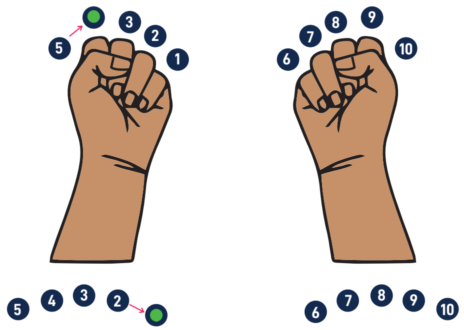


Figura 33. Paso 2 de la resta de 5-2 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

Paso 3: El minuendo 1 (parte inferior) retrocede 1 espacio y el sustraendo 4 (parte superior) retrocede 1 espacio, (Figura 34).

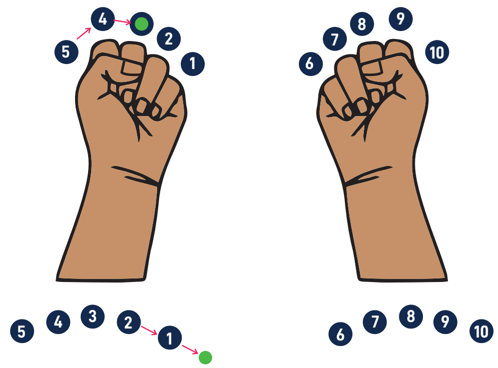


Figura 34. Paso 3 de la resta de 5-2 en el ábaco Shuar

Fuente. Elaboración propia

La respuesta, es el lugar donde queda ubicado el objeto, es decir el dedo medio de la mano izquierda, que representa el número 3 en la recta bidireccional Shuar.

A manera de conclusión

La constatación de la existencia de un cuerpo epistemológico propio de la nacionalidad Shuar, deja entrever que el manejo del espacio tiempo determina las estructuras lógicas y lógico matemáticas, la forma en la que se interpreta el tiempo, las formas en que se organiza la convivencia y las formas en que la narrativa de la cultura expresa su relatos cosmogónicos, sociales y culturales.

Esta constatación nos lleva a colegir que una pedagogía de las Matemáticas, desde un sistema de pensamiento diferente al occidental eurocéntrico, implica reconocer que existe un racismo epistémico, que niega la existencia de otros saberes, se entiende que “el racismo es una jerarquía global de superioridad e inferioridad sobre lo humano que ha sido políticamente producida y reproducida durante siglos [...] las personas que están arriba de la línea de lo humano son reconocidos socialmente como humanos [...] las personas por debajo de la línea de lo humano son consideradas subhumanas o no humanos” (Grosfoguel, 2018, p. 98).

Sobre la línea de lo humano está la epistemología occidental eurocéntrica, reconocida socialmente. Bajo la línea de lo no humano están los saberes, valores, sistemas de pensamiento de las culturas no occidentales, unas epistemologías no reconocidas, invisibilizadas por la pedagogía, cuya función eurocéntrica es validar el conocimiento occidental e invisibilizar los otros conocimientos posibles. Pensar la pedagogía desde los conocimientos y las lógicas de lo no humano resignifican a la pedagogía desde su función de homogenización de lo humano, hacia el reconocimiento y puesta en valor de la diversidad, de lo no humano, como un mecanismo descolonizador del ser, del saber y del poder.

Utilizar el ábaco Shuar es el primer paso para dar estatus al capital simbólico de esta cultura, porque a través de esta propuesta pedagógica se incorpora la epistemología Shuar en las instituciones educativas, que de manera natural la discriminan, legitimando otra matemática a través del ejercicio pedagógico. Este estudio y la aplicación del ábaco Shuar son una invitación a descolonizar el ser, a través de la utilización del saber para revertir las acciones del poder, que deslegitiman y deshumanizan la diferencia cultural, epistémica, cognitiva y lingüística de los seres humanos.

Referencias

Adams, R. (1975). *Energy and Structure: A theory of Social Power.* Austin.

Arriaga, J. (1992). *Apuntes de Arqueología Cañar.* Imprenta del Clero.

Bourdieu, P. (2000). Sobre el poder simbólico. Intelectuales, política y poder. Traducción de Alicia Gutiérrez, Buenos Aires, UBA/ Eudeba. Recuperado de https://sociologiac.net/biblio/Bourdieu_SobrePoderSimbolico.pdf

Covaz, M. (1987). *Las matemáticas como experiencia cultural. Pueblos indígenas y educacion*. Ediciones Abya Yala.

Cladellas, R. (2009). El tiempo como factor cultural y su importancia socioeconómica: Estado del arte y líneas futuras. Intangible Capital. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer* [Ethnomathematics: The art or technique of explaining and knowing]. Editora Atica.

D'Ambrosio, U. (2003). Stakes in mathematics education for the societies of today and tomorrow. *Monographie de L'Enseignement Mathematique* (39), 301-316.

D'Ambrosio, U. (2004). *A reflection on Ethnomathematics: Why teach Mathematics?*. http://vello.sites.uol.com.br/why.htm.

Goblet, V. (1993). Parteras, entre brujas y doctores: juegos de poder ambiguos entre agentes de los sistemas de salud formal e informal en la sierra ecuatoriana. FLACSO Ecuador.

Greenberg, J. (1978). *Generalizations About Numeral Systems, en "Universals of Human Language*" (Vol. 3). Morphology, Stanford University Press.

Grosfoguel, R. (2021). *La descolonización del conocimiento: diálogo crítico entre la visión descolonial de Frantz Fanon y la sociología descolonial de Boaventura de Sousa Santos.* Departamento de Estudio Étnicos, Berkeley University. http://www.boaventuradesousasantos.pt/media/RAMON%20GROSFOGUEL%20SOBRE%20BOAVENTURA%20Y%20FANON.pdf

Karsten, R. (2020). *La Vida y la Cultura de los Shuar*. Ediciones Abya Yala.

Kawaguchi, T. (1982). *Recent Development and Issues of Mathematical Education in Japan*. Department of Mathematics, University of Malaya.

Milla, C. (2008). *Génesis de la cultura andina. Editorial Amaru Wayra.* Chinchaysuyo.

Pellizaro, S. (1965). *Apuntes de gramática Shuar.* Ediciones mundo Shuar.

Piaget, J. (2018). *Seis estudios de psicología.* Siglo XXI Editores.

Quijano, C. (2016). Lingüística general de Ferdinand de Saussure. *Entornos*, *29*(2), 153–182. https://journalusco.edu.co/index.php/entornos/article/view/1270/2410

Scott, P. (2021). La contribución intelectual de Ubiratan D'Ambrosio a las Etnomatemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. (Número especial), 285-293.

Taylor, E. (2017). Primitive culture researches into the developmentof mythology, phylosophy, religión, art and custom. *Home of hard to find books.*

Villavicencio, M. (1993). *Matemática y educación elemental en poblaciones indígenas.* Pedagogía intercultural bilingüe tomo V. Editorial Abya Yala.

Yánez, C. (1985). Elementos de análisis quichua en matemáticas. Revista Cultura. Vol. VII. No. 3. Banco Central. Quito, Ecuador.

Yánez, F. (2001). Nekapmartin, la matemática del pueblo de las cascadas. Universidad Politécnica Salesiana. Quito, Ecuador.

Yánez, F. (2009). Construcción del saber matemático y mediación socio cultural. Revista semestral para el diálogo entre personas de pueblos y nacionalidades diferentes. UNICEF. Lima, Perú.

5

LA MATEMÁTICA INCA: UN RECORRIDO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Roxana Auccahuallpa Fernández

Universidad Nacional de Educación UNAE

Introducción

Las Matemáticas a lo largo de la historia se han desarrollado en las diferentes civilizaciones. Existe noción de que la Matemática solo puede desarrollarse en una civilización posterior al haber adquirido la escritura. No es fácil comprender, dado que muchas civilizaciones alcanzaron un gran progreso sin contar con registros escritos. Por ejemplo, los incas a diferencia de los mayas desarrollaron un sistema de numeración avanzado para la época basado en tres símbolos: la concha, el punto, y la línea.

El imperio de los incas desarrollado en 1532 era vasto antes de la invasión española. Su extensión comprendía desde Colombia, (lo que hoy es la frontera norte de Ecuador) hasta la provincia de Mendoza en el centro-oeste de Argentina y el río Maule en Chile central. Según O' Connor et al. (2001), el pueblo inca contaba con aproximadamente 12 millones de personas de diversos grupos étnicos que hablaban cerca de 20 idiomas diferentes.

Los incas desarrollaron un método de registro de información numérica avanzado para la época, pero sin escritura. Empleaban variados nudos en una cuerda llamadas quipus. Este método de registro lo hacían los Quipukamayoc, quienes eran los encargados de hacer el registro de información. En el dibujo de Guaman Poma de Ayala, su característica es el Quipukamayoc con un quipu y una yupana que servían para hacer cálculos. De ahí, las siguientes preguntas:

¿Qué conceptos matemáticos conocían los Incas? ¿Cuál fue el sentido del número en la cultura inca? y ¿Cómo podemos aprovechar pedagógicamente los saberes de los incas en la enseñanza de las matemáticas?

El proceso del contar y el sentido del número en las civilizaciones como los Incas pudo diferir de una cultura a otra, esto dependió de las prácticas religiosas, sociales, económicas y, en general de la cosmovisión que una cultura tenía en un determinado tiempo y lugar. Tal como lo señala Holguín (2017), el quechua fue una de las principales lenguas que los incas usaron y les permitió desarrollar el número inca a través de las palabras en quechua que aparecen para referir numerales y desarrollar un sistema decimal numérico.

El propósito del presente trabajo es valorizar las ideas matemáticas, que conocían una de las civilizaciones más antiguas como los Incas a través del reflejo de sus diversas manifestaciones culturales. Lo anterior para sugerir pedagógicamente saberes en el diseño de estrategias de enseñanza y aprendizaje en la actualidad.

Desarrollo

Los incas constituyeron una de las civilizaciones con gran desarrollo no solo arquitectónico, sino que fueron uno de los grandes imperios forjados en América del Sur. Llamado el Imperio de los Incas o Tahuantinsuyo cuya capital era la ciudad del Cuzco. Existen datos que los incas trabajaron arduamente para ser un imperio. Ampliaron y perfeccionaron los caminos, extendieron y abrieron calzadas que comunicaban al Cuzco (su capital), crearon un sistema de regadío muy avanzado. Como no desarrollaron escritura ni sistema de numeración se valieron del quipu y la yupana que era un sistema de contabilidad.

En referencia a la Matemática, los incas proyectaron el calendario millones de años hacia el pasado y hacia el futuro. También, crearon un sistema vigesimal y un signo equivalente al cero. Utilizaban la escritura jeroglífica que inicialmente representaba ideas y luego sonidos. En este sentido, Holguín (2017) señala que la "civilización inca tenía un avance numérico significativo que ayudaba a la administración del imperio y a la sistematización de datos a través de cálculos prácticos y eficientes" (p.5). Por ello, vale rescatar estos conocimientos para mostrar a los estudiantes en la clase de Matemáticas que los números tienen un sentido diferente al usar en la vida cotidiana, pues todas las civilizaciones tuvieron la necesidad de contar y en consecuencia está el desarrollo del número.

En adición, es sorprendente el número de etnias existentes y los invaluables aportes que pueden dar a la sociedad contemporánea. Por ejemplo, en América Latina sobresalieron tres imponentes civilizaciones tales como: la Maya, la Azteca y la Inca, cada una de ellas con grandes aportes culturales, entre los que se destacan sus desarrollos matemáticos. Son bien conocidos los avances que las tres civilizaciones alcanzaron en el campo matemático, pues supera en algunos aspectos los conocimientos que los invasores españoles traían desde su cultura Occidental y se instaron en América (Holguín, 2017).

Los Incas

La civilización inca fue una las más grandes y complejas civilizaciones de la América precolombina. Su imperio abarcaba desde Colombia hasta Chile en donde los grandes Incas, desde Manco Capac hasta Atahualpa Yupanqui lograron unificar un gran número de culturas preincaicas (Chavin, Pucará, Cubisnique, Caral, entre otras). Para Earls (1986, citado en Romero, 2003) señala que:

> Es un verdadero milagro que los Incas pudieran alcanzar una organización equilibrada. Solamente pudieron lograrlo mediante el desarrollo de una ciencia y tecnología de la administración que reunió la gran heterogeneidad de actividades humanas y estructuras ecológicas dentro de un orden holístico. En este sentido, los Incas podrían ser considerados como precursores de la cibernética. Si esta ciencia se define como la "organización de la complejidad", el mundo tiene mucho que aprender de los Incas. (p. 83)

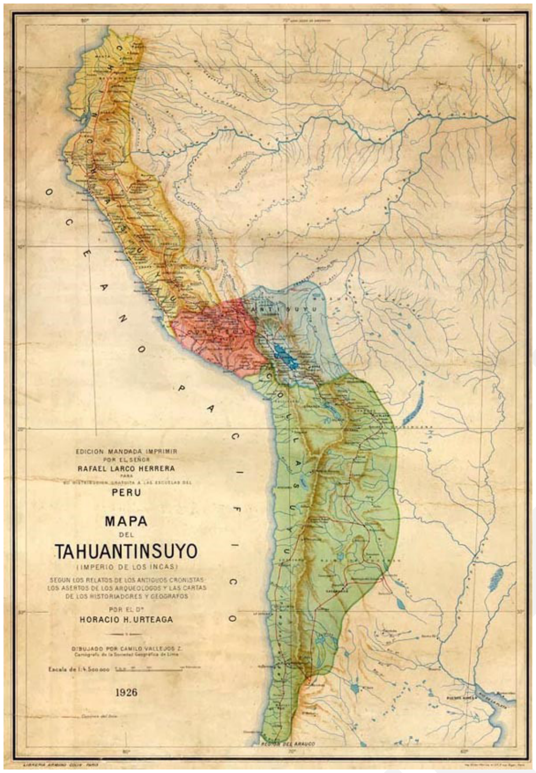


Figura 1. Mapa del Tahuantinsuyo.

Fuente. Kauffmann (1963, Tomado del trabajo de Horacio Urteaga (1926))

En la civilización de los incas (se llamaba Inca al gobernante máximo del imperio) aunque no poseían un sistema de escritura, sí contaban con otros medios de registro como los llamados "quipus", los cuales servían para registrar la información. Poseían eficientes instrumentos de cálculo básico para realizar operaciones matemáticas como la *yupana*. Estos mecanismos, como lo sugiere Von Hagen (1970), le permitían al Inca llevar una contabilidad detallada de su vasto imperio, pues "mediante los quipus el inca sabía el número de tribus, animales (llamas), mujeres, ancianos, etc." (p. 218).

La organización social del imperio de los incas, caracterizaba a los Quipucamayoc como los expertos en sistematizar datos en los quipus. Incluso, el sistema inca manejaba la numeración en base diez y eran encargados de registrar la información del imperio. La base decimal que manejaban definía la estructura social del pueblo inca, cuya unidad fundamental era el ayllu. Así lo menciona Von Hagen en la cita "diez trabajadores eran controlados por un amo de paja (cancha-Camayoc); por cada diez amos de paja había un capataz (pachaca-curaca) y una decena de capataces eran controlados por un supervisor" (1970, p. 51).

En otras palabras, los incas alcanzaron un avanzado grado de civilización y de desarrollo técnico en los campos de la agricultura, la astronomía, los acueductos, la arquitectura, la ingeniería, entre otros. También, ingeniaron un eficiente sistema de numeración empleando la base diez conocidas a través de los quipus y la *yupana* como mecanismo de cálculo de operaciones básicas.

Ubicación geográfica del imperio de los incas

El Imperio inca se extendió a lo largo de la costa del océano Pacífico, porque cada Inca expandía el imperio durante sus años de reinado y añadía tribus. Por su parte, el investigador Prescott (1974) establece que el territorio incaico era delimitado "aproximadamente desde el segundo grado de latitud norte al treinta y siete de latitud sur, siguiendo la línea que determina los límites de las modernas repúblicas de Ecuador, Perú, Bolivia y Chile" (p. 5); en menor medida existía expansión hacia Argentina, Brasil y Colombia.

El *Tahuantinsuyo* (vocablo quechua que significa "cuatro regiones o divisiones") corresponde al territorio conquistado por el Imperio inca (Figura 1). La región se encuentra enmarcada por una imponente cadena montañosa que contrasta con colinas de baja altura, desérticas arenas en las costas y agrestes escarpados en la sierra. La capital estaba ubicada en la ciudad del Cuzco y de allí el nombre "ombligo del mundo" por su ubicación geográfica.

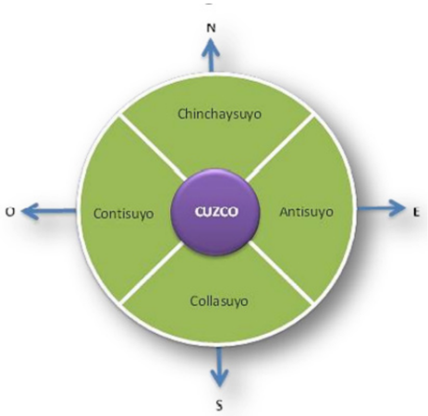


Figura 2. El *Tawantinsuyo*
Fuente. Elaborado por García (2010)

Religión y cosmovisión

El Imperio de los Incas y la vida de todos los habitantes giraba en torno a su religión y creencia en sus dioses, dado que eran politeístas (muchos dioses). El dios creador de todo era Viracocha. El Inca y su esposa eran hijos del dios Sol; Inti y la diosa Luna; Quilla. En la cosmovisión inca era importante la diferencia de género entre lo masculino y femenino, de modo que, el Sol era masculino y la Luna era femenino. Estos eran a la vez esposos y hermanos. De la misma manera, el emperador y su esposa también eran hermanos.

El sistema político tenía su fundamento en una teocracia de estricta sucesión de poder sobre los hijos del Sol. En este sentido, Prescott (1974) señala:

> Por otro lado, los súbditos de los Incas añadían a la lista de sus divinidades inferiores diversos objetos y fenómenos de la naturaleza, tales como los elementos, los vientos, la tierra, el aire, las grandes montañas y los grandes ríos, que les impresionaban por su creciente aspecto de grandeza y poder, o bien porque a su parecer ejercían algún género de influencia sobre el destino de los hombres. (p. 79).

A partir de los mitos relatados por los ancianos el dios Viracocha, creador de todo, creó tres mundos a saber: (1) Hanan Pacha: mundo de arriba, celestial o supraterrenal, (2) Kay Pacha: mundo del presente y de aquí. (3) Uku Pacha: mundo de abajo o de los muertos. Como lo sugiere Prescott: "los peruanos reconocían la existencia de un ser supremo, creador y moderador del universo (...) pero [según ellos] era el Sol el que presidía particularmente los destinos de los hombres" (1974, p. 82).

La lengua en el imperio de los incas

En la actualidad, una de las lenguas que se mantiene viva y permanece en los pueblos andinos es la lengua quechua, puesto que se habla en países andinos como Perú, Ecuador, Bolivia, Colombia, Chile y Argentina. En el período preincaico existía gran cantidad de tribus y etnias, cada una con sus dialectos. Entre ellas, los quechuas y su lengua fueron absorbidos por la expansión del Imperio Inca, por ello la lengua fue adoptada, enseñada y oficializada por orden del Inca Pachacuti. A pesar que, los incas no poseían escritura, su lengua revelaba una compleja estructura gramatical y gran expresividad de un sistema de numeración de base diez. En cualquier caso, Von Hagen (1970) advierte sobre la lengua:

> Los sonidos sibilantes y las variantes fricativas (...) dan al quechua una gran expresión tonal (...) Un sustantivo puede formarse de un verbo, tan sólo agregando a la raíz sufijos nominales en lugar de sufijos verbales, y las más sutiles gradaciones de significado pueden expresarse insertando afijos entre la raíz y su terminación gramatical. (p. 49)

Dicho esto, Von Hagen señala que el quechua es una muestra de lo complejo que puede ser el estudio de la lengua quechua en su forma gramatical sin mirar la complejidad de su pronunciación, pues es probable la existencia de palabras casi imposibles de pronunciar para una persona que no tenga práctica alguna. No obstante, es maravilloso apreciar cómo solo apelando a la capacidad expresiva de la oralidad se logró consolidar un idioma tan rico y plurisignificante. Por tanto, para Von Hagen "el quechua fue uno de los instrumentos para transmitir el modo o estilo de vida de los incas por todo el ámbito de los Andes" (1970).

Organización socio-política

De acuerdo con Miño (1994), por las funciones que desempeñaban los distintos individuos en el Cuzco surgen los siguientes grupos de acuerdo a la jerarquización social:

Nobleza: Panacas, Ayllus custodios e Incas por privilegio.

Según el estudio de Zuidema (1964), la población propia del Cusco estaba constituida solamente por miembros de las diez panacas (vivían en los palacios del Cuzco) y diez ayllus custodios (vivían fuera del Cuzco).

Sacerdotes.

Residían en los templos.

Nobleza de provincias. Hijos de curacas de regiones conquistadas.

Los hijos de los caciques de las provincias conquistadas debían residir en el Cuzco, existe la probabilidad que la finalidad podría haber sido para adoctrinarles en las leyes, lengua y religión inca.

Artesanos: Especializados, Acllas.

Las actividades de las acllas eran hilar y tejer objetos de calidad para el Sol, el Inca y la corte. Vivían en el Cusco en los Aclla-Huasi existentes, uno en el Coricancha.

Sirvientes de los templos y de los palacios.

La nobleza incaica tenía sirvientes que residían en los palacios de las Panacas y ayllus custodios y en los templos.

Matemática de los incas

Los incas alcanzaron a desarrollar un imperio con alto grado de organización social y económica, además de sofisticadas técnicas de construcción, arquitectura, ganadería, agricultura y extraordinario manejo de la producción textil. Todo esto, los llevaron a desarrollar instrumentos que les permitieran llevar la contabilidad en un imperio tan extenso y controlar así la distribución de la población, el reparto de los recursos y la recolección de los tributos, número de habitantes, número de animales, entre otros aspectos contables. Para dar respuesta a estos controles del imperio desarrollaron mecanismos de sistematización, registro de la información y de conocimientos matemáticos que precisaban estas tareas. Gracias a ello y a la necesidad de cuantificar todo lo relativo a la administración, los incas desarrollaron un sistema de numeración decimal y medición avanzado a la época, la práctica de operaciones básicas y un sistema nemotécnico de almacenamiento de los datos.

El sistema de numeración decimal era el utilizado por los incas. La circunstancia significó -por su carácter posicional- que los Quipucamayocs, quienes eran los encargados de sistematizar y registrar la información en los quipus, estuvieran en la capacidad de registrar grandes cantidades, hasta del orden de unidades de millón. Desde luego, Von Hagen (1970) describe el quipu de la siguiente manera:

> Consistían en un sencillo e ingenioso artificio: Un cordel principal (de 30 centímetros hasta varios metros de longitud) y de él pendían muchas cuerdecillas de colores con nudos espaciados (quipus). Se ha demostrado por quienes los han estudiado, que las 30 cuerdas se usaban para registrar números según un sistema decimal y que había un símbolo para el cero, esto es, un cordel con un "espacio vacío" esto les permitía contar cantidades mayores de diez mil. (p. 217)

Por tanto, los incas desarrollaron herramientas matemáticas únicas como los quipus, yupanas y taptanas, que principalmente lo usaban matemáticos de la nobleza, llamados Quipukamayocs.

La Figura 3 presenta el esquema de un quipu inca que ilustra la representación del número 113. Además de la conformación de los nudos y la forma posicional decimal vertical, también evidencia jerarquía: entre más arriba el nudo, mayor su valor posicional.

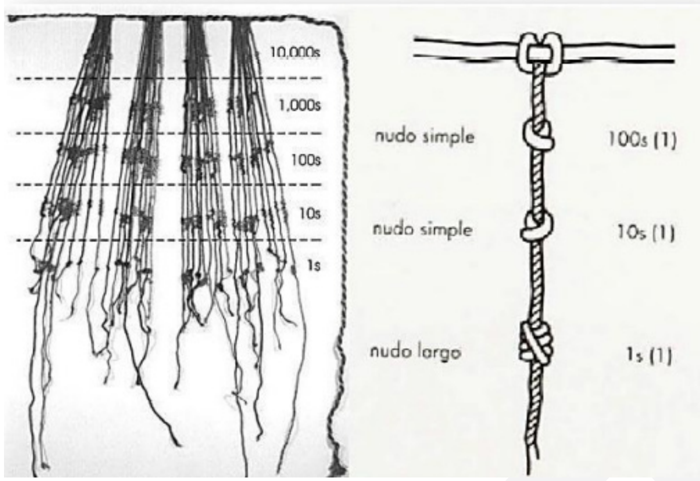


Figura 3. Posición de los nudos en la estructura jerárquica de un quipu y representación del número 113.
Fuente: Escobar (2015)

En adición, el quipu era utilizado por los incas para consignar datos numéricos que previamente habían sido calculados. Pero, ¿de qué manera realizaban los incas estos cálculos?, ¿poseían los incas alguna especie de ábaco? Con respecto a estas interrogantes, García (2010) afirma que:

> Las últimas investigaciones han aclarado que estos nudos

no se utilizaban para ejecutar cuentas, como se creía anteriormente, sino que estas cuentas se hacían utilizando unas piedrecillas sobre un panel y posteriormente trasladaban los resultados obtenidos al quipu. Así, para realizar los cálculos utilizaban la yupana, que normalmente era de arcilla. Esta yupana era una especie de tablero (por eso en un principio se confundió con algún tipo de juego), o caja con diferentes depósitos, en cuyos extremos se ponía lo que se debía de pagar y lo que se iba recaudando, por lo que se le llamó el ábaco incaico (p. 140).

Figura 4. *Yupana* inca.
Fuente: Archivo Digital de Arte Peruano (ARCHI), s.f

La figura 4 muestra la yupana inca, un gran instrumento matemático en el tiempo de los incas y usado en todo el territorio del Tahuantinsuyo. A pesar de ello, aún es de uso como herramienta didáctica para enseñar matemáticas a los estudiantes con los fundamentos de la base decimal. El trabajo de Apaza (2017), muestra de forma pedagógica el uso de la yupana en las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Otro uso característico de la numeración decimal era la organización de la población en grupos de diez o en múltiplos de este número. Al respecto, Urton (2003) afirma que:

en la organización de las poblaciones de las provincias en todo el imperio, la predisposición Inka fue agrupar hogares dentro de unidades decimales estandarizados. Esto se ve, por ejemplo, en los documentos coloniales, especialmente de los Andes centrales del norte y del sur, en los nombres que se utilizaron para diversos niveles de agrupaciones socio-políticos, como chunka (10), pachaka (100) y Waranqa (1000). (p.87)

Muchos ámbitos y prácticas de la vida social de los incas acostumbraban a utilizar el número diez y sus múltiplos para seleccionar aspectos tales como: la cantidad de trabajadores para una obra, el valor del tributo exigido, el número de hilos en la urdimbre de un textil, entre otros (Urton, 2003). Es decir, “el Inka podría requerir un grupo de 100 tributarios para proporcionar 20 personas para trabajar durante 10 días al año en el mantenimiento de una carretera” (Urton, 2003, p. 190).

El uso de la yupana y el quipu fue significativo para los incas, dado que para su época conocer un sistema de numeración decimal ya utilizado en Occidente resultaba fundamental. El sistema manejado por los incas en su momento llegó a ser superior a otros utilizados por civilizaciones más avanzadas. Al igual que el sistema de numeración Occidental, los incas poseían un conjunto de símbolos y reglas para construir todos los demás números. Esto lo podemos ver en la tabla 1 que muestra los lexemas primarios para los números en quechua.

Tabla 1. Lexemas primarios para los números en quechua

Lexemas primarios	Traducción
Uj	Uno
Iskay	Dos
Kinsa	Tres
Tawa	Cuatro
Phishqa	Cinco
Suqta	Seis
Qanchis	Siete
Pusaq	Ocho
Jisqon	Nueve
Chunka	Diez
Pachaq	Cien
Waranka	Mil

Fuente: Elaboración propia

A partir de las ideas de Urton (2003) con los doce términos suministrados en la Tabla 1 y con dos reglas básicas, una aditiva y otra multiplicativa se forman los demás números en la lengua quechua. Desde luego, el autor refiere estas reglas de la siguiente manera: Por encima del número "diez" (chunka), el quechua se adhiere estrictamente al principio decimal en la formación de los números compuestos. Es decir, dado los dos conjuntos principales de la construcción de bloques del sistema de base 10 de la numeración - las unidades 1 - 9, y las unidades decimales 10 (Chunka), 100 (pachaq), y 1000 (Waranqa) – números compuestos son formados por la aplicación, ya sea por separado o conjuntamente, de dos estrategias básicas: yapay ("añadir") y miray ("multiplicar") (Urton, 2003, p. 46). De esta forma, podemos seguir escribiendo la conformación de numeración expuestos en la Tabla 2.

Tabla 2. Ejemplos de números compuestos en quechua

Números compuestos en quechua	
Según el principio aditivo	**Según la segunda regla de multiplicación**
Chunka iskayuq:	Iskay chunka:
Chunka kinsayuq:	Qanchis pachaq: 7
Pachaq pusaqniyuq:	Jisqon waranqa:
Pachaq chunka iskayniyuq: 100+	Kinsa chunka waranqa: 3
Waranqa tawayuq:	Waranqa waranqa:

Fuente: Elaboración propia

Significado del número en los Incas

La construcción del número ha sido un proceso que ha surgido en las civilizaciones por necesidad. El trabajo desarrollado por Urton (2003) sobre el significado del número es relevante para el presente trabajo. El número "dos" hace referencia a la presencia en diferentes rituales, algunos de ellos de predicción. Por ejemplo, hallar un número par de granos de maíz era presagio de una buena cosecha. También, había percepciones negativas o positivas al dar a luz gemelos, sin importar cual fuese su combinación: hombre-hombre, mujer-mujer, hombre-mujer. La práctica de ritos de purificación o reparación tenían la idea de que su concepción era de origen sagrado. El número "dos" también desempeña un papel importante en la descripción de la composición corporal y anímica. En esta subcategoría, el hombre está compuesto de una potencia corpórea finita (relacionada con el Kay Pacha) y de otra espiritual eterna, (relacionada con el Hanan Pacha). El desequilibrio de estas dos potencias puede causar enfermedades.

El número "tres" ubicado en la categoría de creador/creación manifiesta la importancia que tenía la tripartición del universo en la cosmovisión inca. La sección en la que el hombre habitaba estaba reservada para las manifestaciones materiales de la creación: animales, plantas y los elementos del paisaje. En el Kay Pacha confluían las potencias divinas y celestes que habitaban el Hanan Pacha o mundo de arriba, lugar reservado para los dioses creadores y para los arquetipos divinos de lo alojado. En el Kay Pacha; en contraposición, el Hurin Pacha, mundo de abajo, inframundo o intraterreno es el lugar donde habitaban los seres oscuros, quienes proyectaban influencias negativas que producían enfermedades, adversidades durante las cosechas y en la cría del ganado (Urton, 2003).

Los incas en determinadas ocasiones para las operaciones mercantiles y de conteo, utilizaban sus dedos como un conjunto de herramientas eficaces para el recuento y organización de las relaciones ordinales entre grupos, cada uno con un máximo de diez objetos. El número diez o sus múltiplos también eran usados para definir la cantidad de trabajadores que debían participar en una obra. Así, por ejemplo, para la construcción de una vivienda o un camino podían conformarse grupos de 10, 20, 50 o 100 obreros.
Urton (1997, 2003) hace referencia a la aritmética inca, dado que si bien existían objetos que en la práctica eran contables también existían otros incontables o de carácter infinito (estrellas, piedras en las laderas de los ríos o las hojas de los árboles). Entonces, podían describir lo finito de lo infinito, aunque de manera diferente a lo occidental. Existía una clase especial de objetos que podían contarse, pero que era mejor no hacerlo, ya que constituía un mal presagio o podía traer repercusiones negativas (por ejemplo, no debían contarse los colores del arco iris).

En adición, las operaciones básicas aritméticas de suma, resta, multiplicación y división eran comúnmente usadas en las transacciones mercantiles y de censos. Para Urton (1997), la operación matemática correspondiente a la resta era usada con frecuencia en la cotidianidad para rectificar un estado que sobrepasa las cantidades aceptadas como de equilibrio, mientras que la multiplicación tenía un sentido de reproducción y fertilidad, por ejemplo, de una o varias semillas sale algunas o muchas plantas. El término para la multiplicación es miray, que hace referencia a la fuerza reproductiva femenina ubicada en sus genitales (Urton, 1997).

Sistema de numeración inca

Los incas poseían un sistema de numeración decimal y de carácter posicional. Al ser una civilización que no hizo uso de la escritura, no dejaron un registro gráfico de símbolos que permitan interpretar cantidades. No obstante, los Incas por la necesidad de registrar los cálculos realizados lo hacían a través del uso del quipu. Estos fueron un instrumento de cuerdas y que, mediante la realización de nudos de variados colores y tamaños les permitía registrar y sistematizar la información numérica obtenida.

Los incas con su sistema de cuentas complicado llamado "quipu" mediante una serie de nudos puestos en cuerdas indicaban las unidades, decenas, centenas, millares, etc. Las cuerdas se ataban a otra cuerda más gruesa. Para saber el significado del quipu utilizaban diferentes colores dependiendo del objeto. Un ejemplo de lo anterior es: si los cordones eran amarillos, significaban oro; si eran rojos, soldados y si eran blancos, plata. Los encargados de leer los quipus eran los contadores llamados 'Quipucamayocs'.

El proceso del contar

El proceso de cuentas empleaba el lenguaje andino, ya sea el quechua, aimara u otros para nombrar números. "Estas se caracterizan por presentar reglas y secuencias lógicas como expresión de un sistema aditivo" (Villavicencio, 1983, p.27). El registro de números se efectuaba de forma concreta con el uso de las partes del cuerpo como: los dedos, manos, pies, cabeza, y recursos del entorno tales como piedras, huesos, semillas, entre otros. En ideas de Bishop (1999) para el proceso del conteo hubo diferentes sistemas de numeración que surgieron a partir del conteo de dedos y partes del cuerpo. En cuanto al uso de hilos y nudos, las comunidades andinas se especializaron en el manejo de los quipus. Respecto al uso de piedrecillas, además de las disposiciones en el suelo fabricaron instrumentos o tableros para este propósito, al que se denomina actualmente como *yupana*.

En contraste a lo anterior, el investigador peruano Guido Pilares (2005) afirma que el proceso del contar inicia por establecer comparaciones entre colecciones de objetos y determinar sus propiedades cardinales acorde a su formación lógica y no temporal. Esta concepción es compartida en parte y explora en la implementación metodológica y la construcción del concepto de cantidad en el aprendizaje de la matemática cultural. En este sentido, es preciso mencionar que en los andes sudamericanos predominó el sistema de numeración de las familias lingüística puquina, jakaru, aimara, quechua, otros. A continuación, se presenta la yupana y el quipu como instrumentos para el desarrollo de la Matemática inca y cómo estos han sido integrados pedagógicamente en la enseñanza de las Matemáticas.

La *yupana*

La yupana en el ámbito académico se mostró gracias a la publicación de la obra "Primera nueva crónica y buen gobierno" atribuido al cronista Guamán Poma de Ayala en el año 1615. Las diferentes interpretaciones del funcionamiento y uso de la yupana surgen gracias a esta publicación. También, aparecen propuestas y adaptaciones metodológicas-pedagógicas en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las escuelas.

Figura 5. La *yupana* al lado del Quipukamayoc en un dibujo por el cronista Guaman Poma de Ayala.
Fuente. Cronista Guaman Poma de Ayala

La yupana es un instrumento usado por los incas para realizar cálculos matemáticos, como las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. Era considerado el “ábaco” del imperio inca y por sus características la yupana servía para que los Quipucamayoc, los contadores reales del imperio. Ellos realizaran grandes cálculos que les servía para administrar censos o cosechas. Los resultados eran consignados en otro instrumento: el quipu, construido como un sistema de cuerdas de colores atadas a una cuerda principal de mayor grosor.

Tal como lo describe Vilchez (2003, como se cita en Rivas, 2010) etimológicamente la yupana significa:

> …yupana es un vocablo Quechua que se deriva del verbo yupay = contar, yupana es un sustantivo que además de designar a un objeto, ordena que para que sea totalmente útil es necesario contar. Asimismo, el término yupana, con la acepción de “tablero de cálculo” resulta ser un neologismo tanto en quechua como en castellano. Es decir, existe la raíz yupa que, aplicada como verbo significa “contar” en sentido de hacer cuentas, calcular. (p. 25)

Mucha de la información sobre la matemática inca y el uso de los quipus y la yupana desapareció con la invasión española. En consecuencia, no hay consenso ni escritura dejaba de manera precisa sobre cómo usar la yupana, sino que investigadores, historiadores y antropólogos han generado diferentes conclusiones sobre su uso. En particular, las indagaciones están centradas en el uso pedagógico para entender y comprender el sistema de numeración inca e integrarlo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

La yupana representaría una tabla de contar en su estado inicial, es decir, sin haber sido utilizada, y ya preparada para colocarle encima/

dentro piedras o semillas (granos) y comenzar a contar. La pregunta es ¿cuál es el significado de los dos colores de los círculos dibujados en la yupana (negro y blanco)?. En este sentido, Di Primeglio escribió en su obra sobre la yupana y el quipu (1979) lo siguiente sobre las posibles explicaciones de los dos colores que pueden verse en el tablero del cronista Guaman Poma:

> En este tablero de Guamán Poma llama la atención, además de la coloración diferente de las fichas (puntos negros y blancos), la variación del número de las mismas según las columnas de escaques: una ficha en la primera columna de la derecha; dos, tres y cinco en las sucesivas. Entre las interpretaciones de esta curiosa puntuación, está la de Henri Wassén que parte de la suposición de que los puntos blancos representan los hoyos del tablero que, al no ser utilizados durante el cómputo, quedaron vacíos; mientras que los puntos negros significan los huecos cubiertos con las fichas empleadas para calcular (...) Esta suposición no encontró muchos seguidores y, por lo general, se ha preferido atribuir la diferencia de color de los puntos a las mismas fichas. Calderón () por ejemplo, (...) pensó, además, que, debido a la necesidad de señalar las operaciones mediante signos diferentes, los numerales de un color eran utilizados para expresar los valores positivos y los de otro color para indicar los negativos, creencia que comparte E. Mendizábal al sostener que la notación negra era para sumar y la blanca para restar. (p.32-33)

El análisis estructural interno de este tablero parecería indicar, más bien que las marcas negras y blancas están organizadas de forma específica en número y forma. No parece corresponder con la idea de piedras o semillas colocadas en la tabla en forma aleatoria, o que representen un cálculo realizado con la tabla. Estos puntos parecen ser marcadores/hoyos en los cuales se colocaban piedras, porotos, granos de quinua o de maíz para hacer los cálculos. Del vocabulario quechua de Gonçalez Holguín (1952) el término “missa” significa “cualquier cosa de dos colores”, así como el término “allqa” que significa “lo de dos colores blanco y negro” o “lo blanco y lo negro”.

Al observar el dibujo de Guaman Poma de Ayala y considerar el contexto y sus dimensiones podemos ver que el instrumento portátil que lleva en sus manos el Quipukamayuq (el Contador Mayor y Tesorero) es el Quipu. Todos estos instrumentos podían ser transportados de un lado a otro por el contador. En el caso de la yupana, se piensa que su cuerpo debía estar hecho de madera o de una sustancia más liviana que la piedra. Reproducimos aquí fotos de tableros del artículo de Radicati di Primeglio.

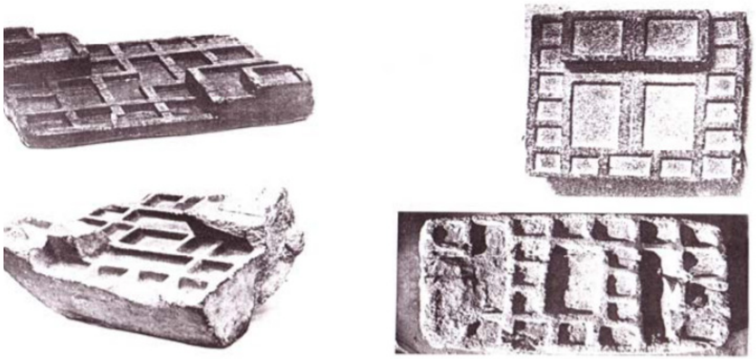


Figura 6. Imágenes de la *yupana*.

Fuente. Mackey, Carol et al., editores. 1997. Khipu y *yupana*. Lima: CONCYTEC (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

Los Quipus

Como muestra el dibujo de Guaman Poma de Ayala, al contar las cuerdas colgantes de este khipu se llega a la cuenta exacta de 55 cuerdas (la yupana tiene 55 círculos en total, 23 negros y 32 blancos). Al comparar este quipu con los otros dibujados por Guaman Poma, es evidente que este quipu está subdividido en dos partes. La primera, desde nuestra izquierda hasta el codo del contador, que es el lugar de donde sale la cuerda colgante 23, tiene una cuerda principal más gruesa. En este mismo lugar, en la cuerda principal hay un nudo de mayor tamaño. La cuerda colgante no. 23 parece más gruesa que las anteriores y que las posteriores a ella, y se parece en su morfología a la 'cola' de la cuerda principal del quipu. Esto sugiere que Guaman Poma dividió este quipu en dos partes, una con 23 cuerdas y otra con 32, teniendo un total de 55 cuerdas colgantes:

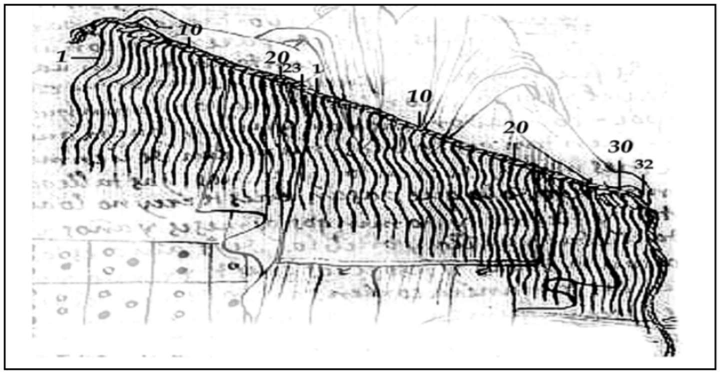


Figura 7. El diseño de un quipu
Fuente. Urton (2005)

El significado de esta división no está aún clarificado. Podría sugerirse, según lo descrito en las fuentes, que los contadores en los depósitos anudaban nudos en una parte del quipu para agregar y sacar nudos de otra parte para restar. Posiblemente este quipu haya sido preparado para operaciones como la del almacenaje, donde se agregan y se sacan elementos, cada una de estas operaciones anotada en el quipu en sus diferentes partes. Sin embargo, en base a lo descrito por Guaman Poma, este contador y tesorero contaba gente. De esto podría inferirse que este quipu haya servido para anotar ciertos elementos durante un censo de la población como los nacimientos y las muertes (equivale a agregar/restar elementos) u hombres y mujeres, cada uno en otra parte del quipu. Otra posibilidad, como complemento de escritura de la yupana, es que este quipu específico haya servido para anotar resultados no finales de cuentas de la población efectuadas en la yupana. Es decir, los números provisorios de una cuenta a sumar eran anotados en una parte del quipu, mientras que las cifras a restar en otra, teniéndolas así "en memoria", para luego transferir nuevamente los números anotados a la yupana y hacer los cálculos finales.

Por ejemplo, si tenían que calcular el 3.5 % de una cifra cualquiera y después restar a esta cifra total, es de pensar que primero hayan calculado el 1%, luego el 3% y seguro finalmente el 0.5%. Al finalizar este cálculo, deben haber procedido a la resta de las dos cifras. Esta operación al hacerlo solamente con la yupana, podría llevar a confusión, sobre todo si se trata de calcular el 3.5% de varias cifras y no de una sola, dado que todos los números estarían anotados en la yupana con piedras o granos y se confundirían granos de una cuenta con la otra. Al anotar en el quipu, las cifras iniciales en el lado de las entradas (+), cada una en su cuerda con su color y significado, y las cifras que deben restarse de estas al otro lado del quipu (-), permitiría después al contador leer y llevar nuevamente esas cifras a la yupana para hacer sus cálculos y proceder a la resta.

El quipu no era una simple calculadora, sino más bien un dispositivo de almacenamiento de información. Consistía de cuerdas de colores con sus respectivos nudos. Un número era indicado por medio de nudos en la cuerda, mediante una representación posicional de base 10. Para registrar 586 se hacían seis nudos cerca del extremo libre de la cuerda, se dejaba un espacio, luego ocho nudos para las decenas, otro espacio, y finalmente cinco nudos para las centenas. Para números más grandes el uso de grupos de nudos era mayor, uno para cada potencia de 10, de la misma manera en que usamos nuestros dígitos en nuestro sistema de numeración. Hay muchos dibujos y descripciones del quipu hechas por los conquistadores españoles. Por su parte, Garcilaso de la Vega escribió:

> Según su posición, los nudos significaban unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millares, excepcionalmente, cientos de millares y ellos están todos bien alineados en sus diferentes cuerdas como figuras que un contable estableciera, columna por columna, en su libro mayor (p.210).

Tras estas definiciones, el quipu, la yupana y sobre todo los verbos 'quiponi' y 'yupani' son considerados en cierta forma como análogos. Si el quipu y la yupana eran instrumentos de cómputo de los contadores imperiales, relacionados primeramente con los censos de la población del imperio, entonces su morfología debía estar adaptada a las divisiones administrativas incaicas de la población. Un punto interesante del quipu, como instrumento de los contadores oficiales del imperio, es que los nudos están efectivamente dispuestos en forma jerárquica desde el número mayor al menor, de arriba hacia abajo (en general desde el 10000 hacia abajo) lo que es paralelo a la división administrativa decimal de la población en el Imperio Inca en grupos de 10, 100, 1000, y 10000 personas. Esta disposición de los números en el quipu, y su analogía con la división administrativa de la población en grupos con cantidades fijas, coincide con el paralelismo descrito precedentemente entre 'Khipuni' y 'yupani', con la definición de 'yupani' como "empadronar".

La yupana, como instrumento de cómputo oficial estaba junto con el quipu adaptada a los estándares imperiales y, sobre todo, estaba ligada al cómputo de la población y del tributo. En lo referente al "tributo" debe aclararse que en el imperio Inca el tributo no era pedido en forma de bienes directamente, como lo fuera más tarde en la época colonial; sino era el producto que resultaba de la prestación de un servicio de trabajo de los que eran llamados a tributar. El tributo en la época inca era calculado por el número de personas que tributaban, y no por cantidades determinadas de bienes específicos.

La *yupana* y los Quipus como elementos pedagógicos para la enseñanza de las Matemáticas

Los quipus son registros matemáticos e históricos que usaban los incas para registrar datos de censos y con ello saber los porcentajes adecuados para el tributo, entre otras cosas. Por lo tanto, para Ascher (1988)
el quipu es una colección de cuerdas, y estas cuerdas de diferentes colores y con nudos que representan los números. Los colores de las cuerdas, las formas de los nudos, la colocación relativa de ellas, los espacios entre cuerdas, los nudos individuales y la colocación relativa de los nudos, los espacios entre nudos; todo esto servía para formular un registro lógico-numérico, un tipo de matriz que podemos entender como un diagrama de árbol. (p.45)

Burns (2002) y Urton (2003) coinciden en señalar que los quipus son de varios tipos y empleados para registrar información concerniente a las cantidades para contar historias, para llevar control del calendario, para registro estadístico, entre otros. Por ello, varios investigadores han intentado descifrar su funcionamiento en cada uno de estos aspectos, a la fecha ninguno ha conseguido del todo interpretar los distintos tipos de quipus. Sin embargo, existe un consenso en el uso para la representación de cantidades. Es característico porque los nudos en las cuerdas están agrupados con no más de nueve nudos, además cada cuerda esta proporcionalmente distribuida por grupos de nudos o por ausencia de nudo que indica el valor de cero. Sin embargo, también existen otros quipus con más de nueve nudos.

Figura 8. Khipu de la Cultura Wari 600 a 1000 d.c. de algodón.
Fuente. (Giannoni, 2014)

Del trabajo de Bousany (2008) realizado en una comunidad del Cusco-Perú, se puede decir que un quipu está compuesto por una cuerda madre o principal en dispuesta forma transversal con varios colgantes o flecos que son cuerdas más pequeñas que prenden de la cuerda transversal, en la que las cuerdas subsidiarias o auxiliares que cuelgan de los colgantes, los nudos de diferentes formas y colores, y finalmente los nudos y cordeles. En este sentido, Apaza (2017) establece que en base a estos elementos se configuran una variedad de valores, símbolos y significados, que es parte de la expresión textil. En el caso de la población dedicada a la actividad del pastoreo el quipu servía para llevar el registro de contabilidad de los animales propios de la zona andina (llamas, alpacas y vicuñas).

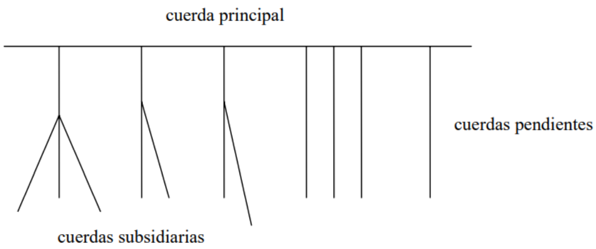


Figura 9. Diseño de un quipu
Fuente. Bolsany (2008)

Según, Bolsany (2008) el uso de hilos colorados y el espacio entre grupos de hilos, eran maneras de hacer que el quipu representara una matriz. Por ejemplo, con tres colores, que se repiten cuatro veces (así doce cuerdas pendientes en total) se forma la serie con el "i" elemento en el "j" grupo, en el que y .", (p.15). Así, en forma de tabla 3 seria:

Tabla 3. Matriz de un quipu

Fuente: Bolsany (2008)

El juego de la yupana 'Tawa Pukllay yupana"

Al considerar el trabajo pedagógico-didáctico realizado en el trabajo de Prem (2016) sobre la decodificación de la matemática inca y el uso de la Yupana para realizar operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, queda claro que la matemática inca incorporó elementos fundamentales de su forma de vida representados en el juego. A continuación, desarrollamos de forma breve esta sugerencia didáctica de aprender operaciones básicas a través del juego con la yupana.

Las operaciones básicas que se realizan en las yupana son: *yupay* (suma), *T'aqay* (resta), *miray* (multiplicación) y el *rakiy* (división). Efectuar el juego de la yupana requiere considerar la siguiente figura:

Columna 5 PISQA	Columna 3 KIMSA	Columna 2 ISKAY	Columna 1 HUQ

Figura 10. Fila de una Yupana
Fuente: Elaboración propia.

Además, si aumentamos el número de filas, estas determinaran lo siguiente: la primera-unidades, la segunda-decenas, la tercera-centena y así sucesivamente.

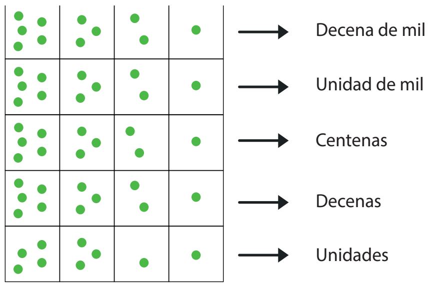


Figura 11. La yupana
Fuente: Elaboración propia.

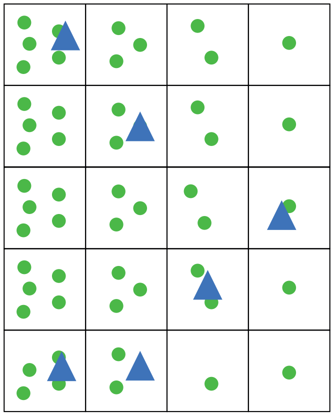


Figura 12. Posición de la cantidad 53128
Fuente: Elaboración propia.

Operaciones con la Yupana

Suma de dos cantidades

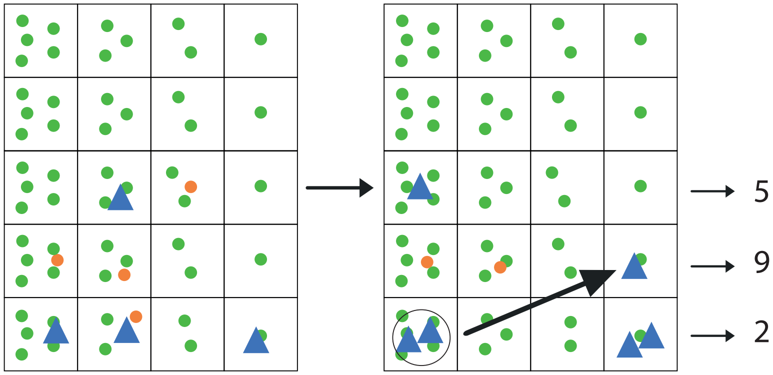


Figura 13. Sumar 309 +283
Nota: Utilizamos el PICHANA (Limpiar las fichas del tablero) y YAPANA (Sube una posición)
Fuente: Elaboración propia.

Resta de dos cantidades

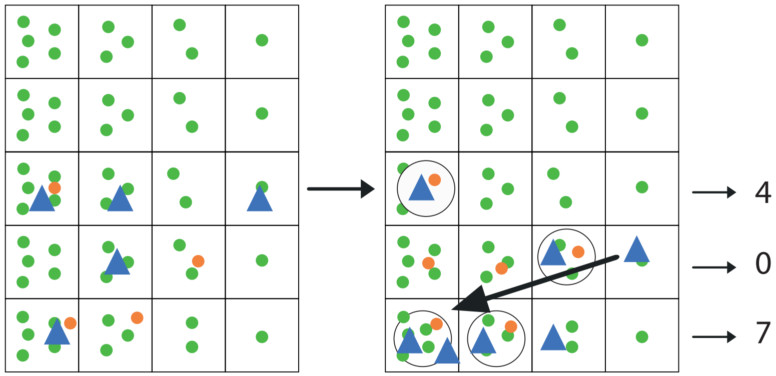


Figura 14. Restar: 935 -528

Nota: Para restar debemos utilizar el principio de eliminación (Triangulo azul – circulo). En el tablero deberán quedar solo triángulos azules (Minuendo)**Fuente**: Elaboración propia.

Los movimientos a considerar para el tawa puklla en la operativización son:

La simplificación: consiste en juntar semillas de una fila y tener menos número de semillas en cada columna.

La pichana: consiste en la limpieza de semillas y aunque puede ser utilizado en cualquier momento, siempre debe usarse para ver si hay pichanas pendientes.

Movimiento de extensión: usados en los juegos del T'aqay y el Rakiy. Son movimientos sencillos que consisten en descomponer una semilla con un valor determinados en más semillas.

Movimiento Yanapay: proviene del quechua "ayuda" y sirve cuando hay dos semillas en la columna 5 y esta debe pasar a la siguiente fila como una semilla en la columna 1.

Este juego de la yupana establece una lógica para realizar operaciones básicas sin la necesidad de ir llenando los hoyitos con semillas, sino mediante la representación de la semilla en la columna. Este juego se puede encontrar en el libro de Prem (2017).

Conclusiones

La Matemática inca trajo consigo grandes aportes para la matemática occidental, aunque no tenían escritura. Esta matemática basada en un sistema de numeración decimal fue muy avanzada para la época. A través de los quipus, la yupana y la Taptana, los incas desarrollaron cálculos y un sistema de registros de contabilidad de situaciones como: el registro del número de animales, tributos que tenía que pagar el pueblo, número de mujeres, niños y ancianos, entre otros.

Desde luego, cuando nos referimos a la yupana dibujada por el cronista Guaman Poma de Ayala, ésta ya se había ubicado en muchos objetos e imágenes porque los incas hasta la dibujaban en la tierra para hacer sus propios cálculos. El material podía haber sido de madera, arcilla; es decir, de un material ligero para poder hacer cálculos de forma inmediata. A pesar de la existencia de variadas formas para realizar las operaciones básicas en la yupana; el juego del Tawa Puklla desarrollado por Prem (2017) es el más simple, porque carece de cálculos con algoritmos complejos y simplemente requiere conocer los movimientos del juego y con ello desarrollar la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Referencias

Apaza, H. (2017). *Propuesta pedagógica. Empleo de la yupana multibase*. Facultad del profesorado y educación. Universidad Autónoma de Madrid.

Ascher, M. (1988). Ideas matemáticas de los incas. *Pueblos indígenas y educación* (8), 41-70.

Bishop, A. (1999). *La enculturación de la matemática. La educación de la matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.

Bousany, Y. (2008). *Yupanchis: La Matemática Inca y su Incorporación a la Clase.* Independent Study Project (ISP) Collection. Paper 1. Disponible en: http://digitalcollections.sit.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1011&context=isp-collectio

Burns, W. (2002). *Decodificación de quipus*. Lima: Banco Central de Reserva del Perú y Universidad Alas Peruanas.

Garcilaso de la Vega. (1985). *Comentarios reales (tomo 1).* Caracas: Fundación biblioteca Ayacucho.

Giannoni, D. (2014). *Fotografia de Khipu cultura Wari*. Fundación Museo Amano. Lima, Perú. http://nga.gov.au/exhibition/Incas/Default.cfm?IRN=227101 &BioArtistIRN=41379&MnuID=3&GalID=7&ViewID=2

Gonçalez Holguín, D. (1952). *Vocabulario de la Lengua General de todo el Perú llamada Lengua Qquichua o del Inca*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.

Guaman Poma de Ayala, F. (1987). *Nueva crónica y buen gobierno*. Madrid: Historia 16.

Kauffmann, F. (1963). *Los Incas y el Tahuantisuyo*. Lima: Peruanística. Sociedad Académica de Estudios Americanos.

Miño, L. (1994). *El manejo del espacio en el Imperio Inca*. Tesis. Ecuador. Recuperado de https://biblio.flacsoandes.edu.ec/libros/digital/44225.pdf

Prem, D. (2016). *Decodificando la matemática Inca*. *Yupana Inca*. Biblioteca Nacional del Perú. Lima.

Prescott, W. (1974). *El Mundo de los Incas*. Minerva.

Romero, H. (2003). Llamas, mito y ciencia en el mundo andino. *Revista de Ciencias Sociales*. (13), pp. 74-98. http://www.revistacienciasociales.cl/archivos/revista13/pdf/rcs13_7.pdf

Urton, G. (1997). *The Social Life of Numbers: A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic*. Texas, United States of America: University of Texas Press.

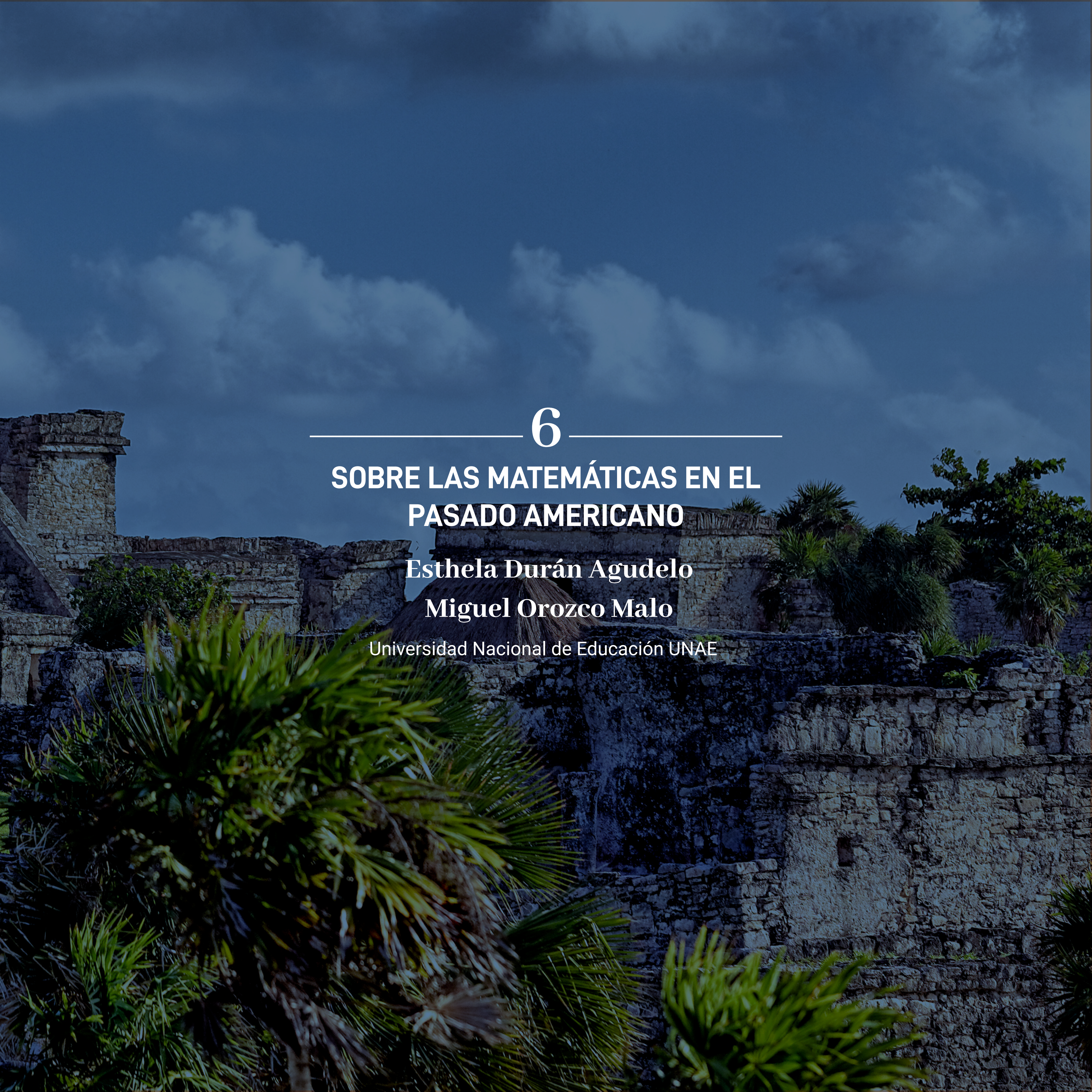
Urton, G. (2003). *Signs of the Inka Khipu: binary coding in the Andean knotted-string records*. Texas, United States of America: University of Texas Press.

Urton, G. (2005). *Signos del Khipu Inka: Código Binario*. Cusco: Centro de Estudios Regionales Andinos, Bartolomé de las Casas.

Villavicencio, M. (1983). *Numeración, algoritmos y aplicación de relaciones numéricas y geométricas en las comunidades rurales de Puno.* Lima: Ministerio de Educación INIDE.DDE.

Von Hagen, V. (1970). *El imperio de los incas*. México: Diana.

Someda, H. (2001). *El imperio de Los Incas. Imagen del Tahuantinsuyu creada por los cronistas*. PUCP-Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.



6

SOBRE LAS MATEMÁTICAS EN EL PASADO AMERICANO

Esthela Durán Agudelo
Miguel Orozco Malo
Universidad Nacional de Educación UNAE

Introducción

Antes de la agricultura, nuestros ancestros en el África subsahariana, siguian a las manadas que se desplazaban en diferentes épocas del año, etapas relacionadas con las estaciones, como aún lo hacen actualmente las grandes manadas. Las Matemáticas de nuestros ancestros nómadas eran relativamente sencillas: ¿Cuántos somos? ¿Cuántos alimentos tenemos? Todas estas preguntas tenían que ver con contar, sumar y restar cosas.

Las personas aprendemos a contar cosas desde pequeños: una boca, dos ojos, cinco dedos en cada mano, diez dedos en las manos, veinte entre manos y pies, muchos dientes. Aún antes de la agricultura, había que contar. El líder de un grupo humano contaba cuántas personas lo integraban; contaba a aquellos que podían cazar de aquellos que no. Cuando contamos cosas físicas que están frente a nuestros ojos, el número es algo concreto. Lo más difícil es darle un nombre a cada cantidad. Sin embargo, otras preguntas eran más interesantes. ¿Cuántos días faltan para el invierno? Responder a esa pregunta requiere de observación e información adicional.

Desarrollo

Midiendo el tiempo: el calendario solar y lunar

Nuestros ancestros podían medir el tiempo observando al Sol, a la Luna, y en especial, las estaciones. La salida y puesta del sol marcarían un día. El recorrido de la Luna en torno a la Tierra, con una duración de 28 días aproximadamente, daría los "meses". Alguien habría creado las semanas para hacer más manejable el contar los días. Las **estaciones** son el resultado del movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol. La inclinación del eje de rotación de la Tierra es la causa de las estaciones. Cuando el polo norte se inclina hacia el Sol, es verano en el hemisferio norte, pero cuando el polo sur se inclina hacia el Sol, es invierno en el hemisferio norte. El sosctilcio ocurre cuando el Sol alcanza su mayor declinación y el equinoccio es cuándo el Sol alcanza el cenit y se iguala la duración del día y la noche.

Con la agricultura, las Matemáticas de nuestros ancestros requirieron ser más complejas. Debían calcular el tiempo con precisión. ¿Para qué lo hacían? Principalmente, para saber cuándo sembrar, para guardar alimentos. El tiempo puede parecer un concepto, pero para quien prepara la tierra, siembra, cuida y cosecha, el tiempo es una realidad tangible. Así que, nuestros ancestros observaban a los astros en el firmamento para tener información, pues esa información astronómica servía para su sobrevivencia.

Cómo registraban sus observaciones los antiguos? Es imposible hacer una generalización sobre los símbolos que usaban, pero, a lo largo y ancho de nuestro planeta, nuestros ancestros hacían algo sencillo. Reservaban un área de terreno, en la que solo los iniciados entraban, colocaban una posición de observación, y luego, utilizaban rocas pesadas, para que el agua de la lluvia no las moviera (algunas culturas usaron madera clavada en el suelo; p. ej. cahokian, Madagascar y Amesbury), para marcar los puntos de observación.

Ellos observaban que el Sol aparecía durante los solsticios en sus puntos más alejados, mientras dos veces al año, en los equinoccios, salía en el punto central. Con algo tan sencillo, tenían una información muy valiosa: conocían las marcas de las estaciones. La duración del año depende del Sol que parece desplazarse alrededor de la Tierra cada 365 días (y un poquito más). Usando rocas podían tener una medición del tiempo bastante precisa. En 2004, en el castillo de Crathes, en Aberdeenshire, Escocia, encontraron un calendario lunar de entre el 8000 a. C. al 4000 a. C. En 1991, se descubrió el observatorio solar de Goseck, Sajonia-Anhalt, Alemania, una estructura neolítica construida aproximadamente en el 4900 a.C. El círculo consta de dos anillos que contienen entradas alineadas con el amanecer y el atardecer en los días del solsticio de invierno y entradas más pequeñas alineadas con el solsticio de verano. En América, también se desarrollaron calendarios muy precisos. Gracias a sus cuidadosas observaciones, los mayas nos legaron un preciso y famoso calendario. El calendario inca del año solar tiene 12 meses de 30 días, divididos en 3 semanas de 10 días cada una. Los cañaris desarrollaron un calendario agrícola.

También observaban la Luna, que tiene un movimiento constante alrededor de la Tierra, al que llamamos **ciclo lunar**. Nuestros ancestros observaban que, cada 29,5 días solares, la Luna presenta las mismas fases. En muchas culturas, se relacionaba con la fertilidad porque, aunque no entendían completamente el complicado proceso de dar a luz, pero las mujeres (y las hembras de los mamíferos) eran las únicas que daban a luz. Las culturas antiguas tenían estatuillas de mujeres embarazadas porque asociaban la vida con este fenómeno. Ciertamente, el ciclo menstrual es diferente para todas las mujeres, pero generalmente, dura de 21 a 35 días, en ciclos muy similares a la Luna. En español, la palabra **mes** viene del latín “mensis”, y proviene del griego “mene”, o sea “luna”. En inglés, month proviene del protoindoeuropeo, Moon (Luna) + “th”, que hace referencia a las fases de la luna como la medida del tiempo. El ciclo lunar era especialmente útil para los pueblos de navegantes por estar relacionado con las mareas; p. ej. la Luna llena produce la marea alta. Esto fue tan importante que, los griegos desarrollaron un mecanismo basado en engranes que, como una calculadora, les permitía saber cuando serían las mareas.[1]

Un año tiene 365 días, así que, nuestros ancestros empezaron a agruparlos en **meses**, porque de esta forma era más fácil llevar la cuenta. Posiblemente, decidieron que, los meses tuvieran 30 días, cantidad que casi coincide con el calendario lunar; con 12 meses, llegaron a 360 días; y agregaron 5 más. En otras culturas, lo hicieron con 18 meses de 20 días, y 5 más. En algunas culturas, los 5 días sobrantes eran considerados de mala suerte. Inicialmente, los romanos nombraron a los meses por sus dioses (Martius, Marte; Aprilis, Afrodita; Maius, Maia; Junius, Juno; Januarius: Jano; Februarius, Februus) y por el número de mes (september, mes séptimo; october, octavo; november, noveno y december, décimo), después cambiaron dos de ellos por nombres de emperadores Julio (César) y (Octavio) Augusto.

A través de evidencias dejadas por culturas, sabemos que, los antiguos se preocuparon por cuando volvían a coincidir los dos calendarios, el solar y el lunar[2]. En algunos lugares, a través de una cuidadosa observación y registro, notaron que cada 19 años solares equivalían a 235 lunaciones. Cada 19 años, la Luna está en la misma fase (casi a la misma hora). Antiguos chinos, griegos y mayas llegaron a este mismo calendario.

1 Anticitera

2 Chanier, T. (2016). Solution of the Mayan Calendar Enigma. arXiv:1601.03132.

Las estrellas y la navegación

Hoy, pese a nuestros cielos contaminados, lejos de las luces de las ciudades, las noches sin nubes ofrecen un cielo hermosos. Entonces, los marineros observan muchas más estrellas en el cielo. Así como algunas veces miramos a las nubes y nos imaginamos formas, nuestros ancestros agruparon a las estrellas en formas que les parecían conocidas, para poderlas identificar con mayor facilidad, esas clasificaciones son las constelaciones. En la antigua China observaban la constelación del dragón, mientras en Europa observaban a Orión, y los incas observaban a Saramama (Madre Maíz). En el Pacífico sur, los antiguos navegantes dependían de las estrellas para poder ubicarse y orientarse, literalmente vivían o morían en sus enormes travesías sin tierra a la vista.

¿Cómo representar las estrellas del cielo? Aunque parece práctico usar piedritas de diferentes colores y tamaños colocadas en el suelo, una fuerte tormenta podía mover las piedras borrando años de trabajo.

Noche tras noche, observaban que, las estrellas cambiaban un poco durante el año. La Vía Láctea, nuestra galaxia ocupa un lugar preponderante. Como la Tierra gira en torno al Sol, a lo largo del año, algunas estrellas no son siempre visibles. Casi todo el año, podemos observar algunas estrellas (y sus constelaciones), como Betelgeuse (Orión), Sirio (Canis Mayor), Procyon (Canis Minor), Cástor y Pólux (Géminis), Capella (Auriga) y Aldebarán (Tauro). Para todo fin práctico, las estrellas son inmutables, son perfectas. Sin embargo, en el cielo estrellado había 5 misteriosos astros que no se comportaban como tales.

El enigma de los planetas

A simple vista, es posible observar 5 “estrellas” errantes. Los planetas resultaron tan importantes que, en muchos calendarios, nombraron a sus días por los astros en el cielo. Mercurio está demasiado cerca al Sol para ver sus fases, pero Venus es fácilmente observable al amanecer y al atardecer, es tan fácil observarlo que se le llama el lucero del amanecer o del atardecer. La fase y el tamaño angular de Venus dependen del alargamiento. Marte es el único astro rojo observable a simple vista. Júpiter y Saturno también son observables en noches claras.

Como las estrellas se consideraban fijas, aquellas luces que se movían recibieron un nombre. En español, la palabra planeta proviene del griego planētēs, que tiene dos acepciones vagabundo y errante. Hemos heredado de los romanos una forma de nombrar los días de la semana, en que cada astro tenía su día: Luna (lunes, de Lunae), Marte (martes, de Martis), Mercurio (miércoles, de Mercurii), Júpiter (jueves, de Iovis), Venus (viernes, de Veneris), Saturno (de Saturni), y Sol (de Solis). En español, el día de Saturno cambió a sábado por influencia hebrea y el día del Sol cambió a domingo (de dominicus, “día del Señor”) por influencia cristiana. Los ancestros interpretaban el color de los planetas de forma distinta. Mientras los chinos y romanos consideraban el rojo de Marte como fuego, para los mayas representaba el amor.

Los otros dos planetas del sistema solar pasaron desapercibidos. Urano es visible a simple vista, solamente en muy buenas condiciones de visibilidad, pero se mueve tan lentamente que es fácil confundirlo con una estrella. Y Neptuno está tan lejos de nosotros que, no se puede ver a simple vista. Aunque es posible que los antiguos hayan tenido pedazos de vidrio con la forma adecuada para usarlos como lentes de aumento, es menos probable que hayan dispuesto de dos pedazos de vidrio con las características adecuadas para usarlos como un telescopio refractor.

Los movimientos de los planetas intrigaron a nuestros ancestros. En aquella época, era aceptada la posición de la Tierra como centro del universo, con la Luna, el Sol, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, y Saturno girando a su alrededor en órbitas circulares, y el fondo de estrellas fijas (que también giraban alrededor de la Tierra). Cerca del Sol, observaron a Mercurio y a Venus (al amanecer o atardecer), pero especialmente, les intrigaban Marte, Júpiter y Saturno por sus movimientos retrógrados[3]. Al observar noche tras noche, cada planeta avanza normalmente, hasta que parece retroceder, antes de avanzar de nuevo. Esta rareza parece ocurrir porque consideraban a la Tierra como el centro de nuestro sistema, cuando en realidad, nuestro planeta gira en torno al Sol como los otros planetas, por lo que, ese movimiento, solo se puede explicar con el sistema heliocéntrico. Tanto el modelo geocéntrico (Ptolomeo), con la Tierra como centro, como el modelo heliocéntrico (Copérnico) con el Sol al centro, explican correctamente el movimiento del Sol, la Luna y los eclipses. El modelo geocéntrico no puede explicar todas las fases de Venus, y requiere de un movimiento retrógrado para explicar las órbitas de Marte, Júpiter y Saturno.

Habría que esperar hasta los tiempos de Galileo para entender el movimiento retrógrado. El telescopio de Galileo cambió la visión del cielo. Las observaciones de las fases de Venus demostraron que orbita alrededor del Sol y no de la Tierra; también permitió observar las montañas y valles de la Luna, probando que no es una esfera perfecta.

Los planetas tardan diferente tiempo en dar la vuelta al Sol, así que, observar sus movimientos requiere de un registro paciente y detallado. Marte tarda 687 días terrestres en dar la vuelta al Sol; Júpiter tarda 11,8 años, y Saturno 29,5 años. Los registros de su posición son fundamentales para entender su movimiento. Para poder sostener su sistema heliocéntrico, Galileo necesitó de los registros de Tycho Brahe, que heredó Johannes Kepler. ¿Cómo podían llevar los antiguos esos registros? En muchos casos, los grabaron o pintaron en roca con jeroglíficos, como los mayas. Desafortunadamente, en muchos casos, los registros se realizaron en forma oral, por lo que perduraron tanto como su recuerdo.

3 https://earthsky.org/astronomy-essentials/what-is-retrograde-motion/

Los fenómenos celestiales

Otros fenómenos en la bóveda celestial deben haberles dado mucho a pensar. Observar al Sol les permitió ver sus manchas, pero también les costó la vista. Los eclipses solares preocuparon a los antiguos. La vida en la Tierra depende del Sol, así que, una pausa debe haber llenado de sorpresa a los antiguos. Los eclipses dejaron profundas impresiones, que algunas personas de hace 5 mil años, dejaron dibujos en rocas sobre el fenómeno, como en Meath, Irlanda. Los eclipses de Sol completos son fenómenos que ocurren rara vez, pero los eclipses parciales son relativamente frecuentes. Durante un eclipse, los breves momentos en que el Sol desaparece, los animales diurnos se preparan para dormir, mientas los animales nocturnos retoman sus actividades. Por otro lado, cuando se dan las mejores condiciones, un eclipse lunar permite observar que la Tierra proyecta una sombra de forma circular sobre la superficie lunar. Sin embargo, para deducir esto, es necesario no tener prejuicios que impidan pensar claramente sobre el asunto. Observamos el mundo a través de nuestros prejuicios, como si fueran unos anteojos; mientras más gruesos sean, percibimos la realidad de otra manera.

Los cometas y las lluvias de estrellas eran todo un misterio para nuestros ancestros. Ante la ausencia de una mejor explicación, ellos recurrieron a la superstición o la religión para explicarlos. Se interpretaban como señales de que algo bueno o malo había ocurrido o estaba por suceder. Los cometas son un fenómeno regular, pero ocurren con tantos años de distancia que, parecen irregulares. La historia está llena de ejemplos: la estrella de Belén, el cometa de Julio César, etc. La lluvia anual de meteoritos de las Perseidas era algo más regular en fechas, pero extraño por la forma en que ocurren.

Un meteoro de 10 km de diámetro causó la extinción masiva de animales hace 66 millones de años. Hace casi cincuenta mil años, un gran asteroide de hierro de 35 a 45 metros de diámetro impactó la meseta de Colorado en el norte de Arizona produciendo el cráter. Seguramente, mató a pocas personas, pero en cambio, muchos animales murieron. Afortunadamente para nosotros, los grandes impactos son raros y por ello, están separados por millones de años. Sin embargo, los pequeños asteroides chocan contra nuestra atmósfera todos los días. De los cerca de 17.000 que caen al año, la mayoría, se queman en la atmósfera. Los pocos que llegan al suelo dejan cráteres de mayor o menor tamaño dependiendo de sus características. Los incas construyeron en forma concéntrica algunos sitios en los que había caído un meteorito. Algunos meteoros tienen una composición especial y se han usado como materiales de fabricación de objetos, como la daga “espacial” del faraón Tutankamón. Los mayas, incas y aztecas utilizaron únicamente el hierro de los meteoritos. Imagine el valor religioso de una roca que ha caído del cielo.

También hay misterios que aún estamos por resolver. En el año 76, Plino el Viejo observó un resplandor que parecía salir de una estrella, que se acercó, creció hasta que llegó a ser del tamaño de la Luna, después volvió al cielo, brilló intensamente y desapareció. Con esa descripción, ese fenómeno no se parece a ningún fenómeno atmosférico que conozcamos. Una amenazadora aparición en los cielos, que se vio una sola vez. Podemos decidir que, la historia de Plino está equivocada y olvidarla, o considerarla cierta y buscar una explicación, pero no es fácil saber qué pasó. En los últimos miles años, han caído algunos asteroides que han marcado un punto terrestre, pero la humanidad ni los recuerda.

En los insondables misterios del Cosmos, aún con la Ciencia y Tecnología, tardamos en llegar a la verdad. En la mañana del 30 de junio del año 1908, en Tunguska, Siberia, ocurrió una gran explosión de 12 megatones que aplastó aproximadamente 80 millones de árboles en un área de 2 150 km² de bosque, pero no dejó un cráter. El incidente no es único, pero los anteriores ocurrieron en la prehistoria. Las hipótesis sobre lo ocurrido van desde la explosión de un meteorito en el aire hasta una explosión de una nave extraterrestre. ¿Qué habrá ocurrido?

Midiendo el tiempo: Las horas y los minutos

Dejando de lado estos misterios, concentrémonos en cómo realizaban los antiguos la medición del tiempo durante el día.

Para medir el tiempo del día, las personas no disponían de un reloj en su teléfono celular. Heredamos una tradición que viene de hace unos 5500 años. Los sumerios y babilonios usaron las horas, divididas en 60 minutos con 60 segundos cada uno. Un segundo es 1 ⁄ (24 × 60 × 60 = 86400) de un día, la división del día en 24 horas, cada una de 60 minutos y con 60 segundos cada uno[4]. Sin embargo, en la práctica, solo se usaban las horas. Conforme las sociedades se hicieron más complejas, requirieron de contar el tiempo con mayor precisión. En un reloj de sol, el tiempo varía según la época del año: las horas duran más en verano y menos en invierno. También las sombras de los rayos lunares permitirían medir las "horas".

Para no depender del Sol, uno de los instrumentos más antiguos para medir el tiempo fue el reloj de agua o clepsidra (del griego antiguo κλέπτω, "robar" y δωρ, "agua"; literalmente, 'ladrón de agua') que mide el tiempo por la cantidad de agua que sale. Básicamente, es una vasija con un agujero vaciando agua en otra vasija. Lo usaron inicialmente en Babilonia y China alrededor del siglo XVI a.C. y se siguió usando hasta la el siglo XIV. En el siglo XV, se inventaron los relojes mecánicos, que luego se pudieron llevar en el bolsillo o la muñeca. A finales del siglo XX, las necesidades de precisión llevaron a los científicos a determinar que, un segundo es el valor numérico fijo de la frecuencia del cesio, ΔvCs, la frecuencia de la transición entre niveles hiperfinos del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133, igual a 9 192 631 770 cuando es expresada en unidades de Hz, que es igual a s-1. En resumen, ahora podemos medir con gran precisión un segundo.

Midiendo los objetos

Con la agricultura y la producción de objetos para intercambiar, la medición era fundamental. Por ejemplo, había que vender tanta cuerda, o tela, o madera. En Europa, las distancias las medían usando partes del cuerpo, como pulgares, palmas (desde el extremo del pulgar hasta el del meñique, con la mano extendida y abierta), pies, codos, brazas (de índice a índice abriendo los brazos), millas (mil pasos). En América, los incas usaban medidas similares a las anteriores kapa (palmas), kukuchu tupu (codo), rikra (braza); para

4 Algunos, han tratado de cambiar esto, sin mucho éxito. En 1897, los franceses establecieron la Comisión de décimalisation du temps para idear un sistema decimal para medir el tiempo del día en veinticuatro horas divididas en cien minutos y cada minuto en cien segundos.

distancias mayores, usaban el número de chasquis (mensajero de relevo; el que da y recibe) requeridos para llevar un recado de un pueblo al otro. Los mayas usaban su sistema vigesimal en las medidas: paatan (casi un metro), el k'an (20 paatan), el Nak (400 paatan) y lab (8 000 paatan). n China, usaban otras unidades de medidas, como chi (尺), la distancia entre la punta del pulgar y el índice..

Las grandes civilizaciones se asientan junto a grandes ríos para disponer de agua para ellos, sus cultivos y sus animales. Debían medir el agua que necesitaban para regar, el número de granos para sembrar un terreno determinado, cuántas personas debían trabajar el terreno o cuántas personas eran necesarias para cosechar.

Cuando se trata de medir distancias, en el pasado, consideraban el tiempo que requerían para realizarse; p. ej. el río está 15 minutos caminando a buen paso, ese lugar está a unos 4 días de camino, o debes regresar en cuatro lunas. No debe sorprendernos, porque hoy seguimos usando medidas ad hoc, por ejemplo, vivo a media hora del trabajo, y especialmente, cuando se trata de grandes distancias; próxima Centauri está a 4,23 años luz de la Tierra.

Las antiguas construcciones que nos legaron son un testimonio de cómo usaron los antiguos las Matemáticas. Al inicio, la función era lo importante, pero pronto comenzaron a interesarse por hacer edificios bellos. Para la estética, mientras los griegos llegaron al concepto de la proporción aurea, en Mesoamérica, la norma de belleza era el canamayté maya, que parece estar basado en el diseño de la piel de algunas víboras. En forma similar como la proporción áurea se usó en Europa, el canamayté se usó como modelo geométrico o cuadrado mágico para diseñar edificios, y realizar pinturas o adornos.

Las representaciones numéricas de los antiguos

Toda representación numérica tiene una ventaja y una desventaja. Los sistemas numéricos de los babilónicos (sexagesimal) y mayas (vigesimal) usaban símbolos que repetían para los números. Usando dos símbolos (una cuña para contar unidades y un "ángulo" para contar decenas); los babilonios podían representar hasta 59 dígitos y dejaban un espacio para representar el cero. La ausencia del cero impidió que los chinos desarrollaran totalmente su sistema de numeración. Los mayas representaban hasta el 19 usando un punto para representar unidades y una raya para representar 5 unidades; además, disponían de un símbolo para el cero. ¿Por qué los números arábigos tienen la forma que tienen? Los griegos dibujaban los números utilizando los ángulos para que las personas entendieran su valor. El 1 tenía un ángulo, el 2 (dibujado como Z) dos, el 3 (un Σ invertido), etc. Por contraste, al no ser un sistema posicional, los chinos requerían una serie de símbolos para expresar el valor de un número; eso ofrece el reto de recordar y dibujar cada símbolo. Al escribir números, mientras más es fácil entender su valor, más veces es necesario dibujar cada símbolo.

En uno de los primeros párrafos de este capítulo hemos hablado sobre contar con los dedos, pero con la agricultura, las sociedades crecieron, el número de animales de los rebaños y aves creció tanto que, los dedos ya no eran suficientes, así que los antiguos inventaron instrumentos para contar. Mientras los chinos desarrollaron el ábaco, en América, los mayas usaban tablones, los cañaris disponían de la taptana, los incas contaban con la yupana y para llevar un registro, el quipu que, con nudos diferentes, permitía almacenar datos numéricos. Ciertamente, no eran tan avanzados como las modernas computadoras, pero eran notablemente adecuadas para su época. En el sistema posicional, leemos de izquierda a derecha, una desventaja, porque cuando leemos el primer dígito no sabemos su verdadero valor hasta que leemos el número completo. Los mayas escribían los números de abajo hacia arriba. Los instrumentos mencionados ya tomaban en cuenta el valor posicional. ¿Ha tratado de hacer Matemáticas usando el sistema numérico de los romanos?

El mundo de nuestros ancestros hasta hace unos pocos milenios era un mundo bastante incomunicado. Era un mundo sin celulares, sin computadoras, sin teléfonos, sin televisión, sin radio, sin imprentas, sin libros, sin papel, sin pergaminos o papiros. Para colmo, el medio para viajar era a pie, sin hostales ni estaciones para comprar alimentos o agua; sin mapas dibujados. Nuestros ancestros eran valientes e ingeniosos para poder viajar.

Existen experimentos en tradición oral basados en el juego de teléfono descompuesto que consiste en que las personas pasan una información de una a otra[5]. El paso de información de una generación a otra requiere estimar cuantas generaciones había cada 1,000 años; por facilidad de cálculo, consideremos 30 generaciones; p. ej. en 3,000 años existirían 90 generaciones.[6] Ahora, imagine el juego del teléfono descompuesto con 90 generaciones.

¿Por qué las culturas prehispánicas de América se desarrollaron menos que sus contrapartes en otras latitudes? Vamos por partes. Primero, sabemos que los primeros humanos salieron del África subsahariana. Al observar un mapa de las migraciones es claro que tardaron más tiempo en llegar a Cuzco que, a Roma. En América, las paradisiacas islas del Caribe fueron de los últimos lugares en ser habitadas. Cuando los europeos llegaron ahí, encontraron las culturas taino y caribe, pero muy pocas aportaciones matemáticas. Segundo, el tiempo de las migraciones es tan enorme que, el mapa del mundo ha cambiado. Por la glaciación, varias partes del mundo, que hoy están sumergidas, formaban parte de tierra firme. En particular, frente a lo que hoy es Holanda, había tierra firme que llevaba a lo que hoy es Inglaterra. En Oceanía, hace 20 000 años, las islas de Borneo, Sumatra y Java formaban parte de la península de Indochina, en una zona conocida como Sunda; Sahul era una mega isla que estaba compuesta por Australia y varias islas cercanas.

Sin embargo, es claro que las islas, como Madagascar, fueron habitadas más recientemente que las áreas entorno al Mediterráneo o siguiendo la ruta de la seda. La Polinesia p. ej. isla de Pascua (i. e. Rapa Nui) y Nueva Zelandia son de las últimas regiones en ser habitadas. Incluso, en las islas Malvinas (Falkland) existe evidencia de humanos en la prehistoria. Tercero, independientemente de la geografía, porque el clima varía menos, es más fácil desplazarse siguiendo un paralelo (Este-Oeste) que un meridiano (Norte-Sur). En un mapa, América es bastante más vertical que horizontal. Cuarto, algunas culturas quedaron geográficamente tan aisladas que quedaron rezagadas, p. ej. la cultura de Clovis o cultura de las praderas, en el sur de Estados Unidos y norte de México. Esto sucedió no solo en América, sino en Asia (p. ej. la cultura de Siberia) y otros lugares.

5 Kirby, S., Cornish, H., & Smith, K. (2008). Cumulative cultural evolution in the laboratory: An experimental approach to the origins of structure in human language. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(31), 10681-10686. https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.0707835105

6 Ralph, P., & Coop, G. (2013). The geography of recent genetic ancestry across Europe. *PLoS Biology*, 11(5), e1001555. https://journals.plos.org/plosbiology/article?id=10.1371/journal.pbio.1001555

Conclusiones

Las matemáticas de los ancestros nómadas se centraban en contar, sumar y restar cosas relacionadas con la supervivencia, como la cantidad de personas en un grupo y los alimentos disponibles. Con la agricultura, las matemáticas se volvieron más complejas porque era necesario calcular con precisión el tiempo para determinar cuándo sembrar y cosechar alimentos. La observación del Sol y la Luna, proporcionaba información importante para estos cálculos. Los planetas, considerados "estrellas" errantes, intrigaban a los ancestros debido a sus movimientos peculiares. Basándose en las observaciones astronómicas, nuestros ancestros desarrollaron calendarios bastante precisos, como los mayas; también los incas tenían un calendario agrícola, sumamente útil. Los ancestros también observaban las estrellas y las agrupaban en constelaciones para identificarlas fácilmente, utilizándolas como puntos de referencia en la navegación, especialmente para los navegantes.

En la antigüedad, con el paso del tiempo, las Matemáticas fueron cobrando cada vez mayor importancia. La agricultura y la producción de bienes se convirtieron en actividades fundamentales que requerían una precisa medición para el intercambio. Las grandes civilizaciones comprendieron la importancia de establecerse cerca de grandes ríos para asegurar el suministro de agua tanto para ellos, sus cultivos y sus animales; cuánta agua recibía cada campesino. Las magníficas construcciones legadas por nuestros antepasados son un testimonio vivo de cómo aplicaron los principios matemáticos; por ejemplo, la proporción áurea se convirtió en la norma de belleza en Europa, mientras el canamayté fue la norma de belleza maya. Además, desarrollaron sistemas numéricos con símbolos repetitivos, como el sexagesimal en Babilonia y el vigesimal con los mayas.

Para realizar cálculos y almacenarlos, las antiguas culturas utilizaron diferentes instrumentos. Los chinos innovaron con el ábaco, en América, los mayas utilizaron tablones, los cañaris contaban con la taptana, los incas disponían de la yupana y para el registro de datos numéricos, el quipu permitía almacenar información a través de nudos diferentes. El paso de información era crucial en aquellos tiempos; los conocimientos se transmitieron de una generación a otra mediante la tradición oral. Por supuesto, la geografía desempeñó un papel determinante en el desarrollo de las antiguas civilizaciones, marcando su evolución y su invaluable legado histórico. Sin embargo, las Matemáticas fueron tan importantes que todas las culturas antiguas hicieron un esfuerzo por desarrollarlas.

Referencias

Chanier, T. (2016). Solution of the Mayan Calendar Enigma. arXiv:1601.03132.

EarthSky. (2022). Retrograde motion can be real or illusory. EarthSky | Updates on Your Cosmos and World. https://earthsky.org/astronomy-essentials/what-is-retrograde-motion/

Kirby, S., Cornish, H., & Smith, K. (2008). Cumulative cultural evolution in the laboratory: An experimental approach to the origins of structure in human language. Proceedings of the National Academy of Sciences, 105(31), 10681-10686. https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.0707835105

Ralph, P., & Coop, G. (2013). The geography of recent genetic ancestry across Europe. PLoS Biology, 11(5), e1001555. https://journals.plos.org/plosbiology/artic

EPÍLOGO

Luis Enrique Hernández Amaro

La obra titulada “Matemáticas de los Pueblos Originarios de América” es un trabajo colaborativo realizado por investigadores de México, Perú y Ecuador que refleja las cosmovisiones matemáticas de los pueblos originarios del Abya Yala, evidenciando las formas de pensamiento de cada cultura, lógicas, sistemas y formas de entender su realidad de manera particular. Está obra está compuesta por seis capítulos escritos por diferentes autores y está coordinada por Marco Vinicio Vásquez Bernal y Rosa Ildaura Troya Vásquez.

El libro tiene como objetivo destacar la importancia de comprender los principios lógicos de diferentes sistemas culturales de pensamiento para diseñar procesos efectivos de aprendizaje de las Matemáticas y promueve el diálogo entre personas de diferentes culturas de Latinoamérica sobre el desarrollo de las Matemáticas. Debido a lo cual, el libro se enfoca en el corpus epistémico de las culturas que presenta y sus principios lógicos para enfrentar situaciones económicas, sociales y matemáticas en su vida cotidiana. Además, señala la importancia de incluir en la enseñanza de las Matemáticas los conceptos matemáticos específicos que se alineen con el sistema de pensamiento de cada cultura como, la importancia de los números en las diferentes civilizaciones y su desarrollo de las operaciones matemáticas.

Cada capítulo del libro titulado “Matemáticas de los Pueblos Originarios de América” tiene un objetivo específico relacionado con el conocimiento matemático de diferentes culturas. Así, el Capítulo I escrito por el Dr. Luis Magaña trata sobre el conocimiento matemático de la civilización maya, su cultura lógico-analítica con énfasis en su sistema vigesimal y la invención y uso del cero por este pueblo. El Capítulo II escrito el Dr. Everardo Lara se enfoca en la teoría pedagógica, las bases de la cosmovisión de los pueblos mesoamericanos: Olmeca, Maya, Nahuatl; sus numerales con su interpretación, su uso en sus culturas y la construcción del lenguaje náhuatl.

El Capítulo III escrito por el Dr. Marco Vásquez y la Mgtr. Rosa Troya trata sobre el conocimiento matemático de la cultura andina, particularmente del pueblo Cañari y su desarrollo matemático mediante el lenguaje para el sistema numérico cañari de base 10, describe además, como realizar las operaciones matemáticas

básicas con el Contador cañari. El Capítulo IV desarrollado por el Mgtr. Fernando Yánez explora el conocimiento matemático de la cultura Shuar y su uso del sistema vigesimal que permite realizar operaciones concretas a través de los dedos de manos y pies de manera simétrica, finaliza con las sumas y restas empelando el ábaco shuar.

El Capítulo V desarrollado por la Dra. Roxana Auccahuallpa analiza el conocimiento matemático de la cultura Inca, el significado del número para esta civilización y su uso de la yupana como recurso para realizar operaciones matemáticas y los quipus como sistema de cuerdas anudadas que se utiliza para llevar registros. Finalmente, el Capítulo VI escrito por el Dr. Miguel Orozco y la Mgtr. Esthela Durán se enfoca en como los pueblos originarios de América desarrollaron las matemáticas centrados en contar, sumar y restar elementos relacionados con la supervivencia, como la cantidad de personas en un grupo y los alimentos disponibles.

Todo lo indicado muestra que, la obra plantea principios para el diseño de propuestas pedagógicas que apoyen los procesos de aprendizaje de las Matemáticas basados en el conocimiento matemático desarrollado por los pueblos originarios de América. Finalmente, presenta los beneficios de usar un modelo matemático mesoamericano y andino en el aula de clases, lo que, permitirá lograr una mejor comprensión de las Matemáticas, una conexión de estas con la vida cotidiana de los estudiantes y un ambiente de aprendizaje más práctico.

AmawtayWasi
UNIVERSIDAD INTERCULTURAL
DE LAS NACIONALIDADES
Y PUEBLOS INDÍGENAS

OEI

UNAE

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU

ISBN: 978-9942-7130-1-8
9 789942 713018